UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Pedagogická fakulta

GEOMETRIE S DIDAKTIKOU II.

Vlastimil Chytrý, Jana Prchalová

UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

GEOMETRIE S DIDAKTIKOU II

Mgr. Vlastimil Chytrý
Ing. Jana Prchalová

2013

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA PSYCHOLOGIE

GEOMETRIE S DIDAKTIKOU II

Recenzovali: Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc.
Prof. RNDr. Jan Melichar, CSc.
ISBN: 978 – 80 – 7414 – 593 – 3
Skripta vznikla v rámci projektu Zkvalitňování podmínek pro vzdělávání učitelů na Pedagogické fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí n. L. v kombinované formě studia č.CZ.1.07/2.2.00/18.0020

Recenzovali: Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc.
Prof. RNDr. Jan Melichar, CSc.

ISBN: 978 – 80 – 7414 – 593 – 3

Předmluva

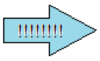
Tato skripta jsou určena především studentům učitelství 1. stupně. Obsahově odpovídají kurzu Geometrie s didaktikou II, kdy některé kapitoly zasahují také do kurzu Geometrie s didaktikou I. Skripta jsou zpracována tak, aby zde student našel vše, co bude potřebné k úspěšnému splnění kurzu. Primárním cílem těchto skript je vytvořit dostatečné portfolio úloh, na kterých budou demonstrovány různé definice, věty a tvrzení.

Každá kapitola (vyjma kapitoly zabývající se konstruktivismem) obsahuje několik částí zaměřených na definice, základní znalosti, didaktické poznámky a řešené úlohy. V závěru kapitoly je vždy uvedeno několik námětů na úlohy. Úlohy označené hvězdičkou nejsou ve skriptech vyřešeny a jejich vyřešení tak nechává autor na čtenáři. Komentáře na některých místech kapitol jsou psány tak, aby byla látka čtenáři co nejvíce srozumitelná. V tomto případě není možné, aby dané komentáře byly plně „matematicky" korektní.

V závěru skript je přiložený vzorový zápočtový test včetně jeho řešení a série otázek, na které se předpokládá, že bude student schopen po absolvování kurzů Geometrie s didaktikou I a II odpovědět. Zvládnutím těchto testů je čtenář na nejlepší cestě k získání zápočtu a také zkoušky.

Stěžejní literaturou při sestavování těchto skript jsou Perný (2009), Perný (2010) a Bělík (2005). Pokud byly některé obrázky staženy z internetu, je u nich číslo v hranaté závorce a za seznamem literatury je uvedený příslušný odkaz.

Použité piktogramy



Definice

Stěžejní (důležitá) část

?

K zamyšlení

Úloha, jejíž řešení autor ponechává čtenáři. Je-li tento symbol před nadpisem kapitoly, znamená to, že žádná zde zmíněná úloha není autorem vyřešena.

!!!

Úloha, kterou musí čtenář bezpodmínečně zvládnout. Je-li tento symbol před nadpisem kapitoly, znamená to, že čtenář by měl zvládnout všechny úlohy v této kapitole zmíněné.

Časově náročná úloha

1. Úvod

Geometrie, měřičství, jest nauka o veličinách a útvarech prostorových. Pojmů těchto útvarů nabýváme abstrakcí z předmětů hmotných[1].

Vyjdeme-li z tohoto pojetí geometrie, dostaneme se k základnímu učebnímu postupu na prvním stupni základní školy, kdy abstrakci musí vždy přecházet práce s hmotnými předměty.

Rozvoj schopnosti abstrakce je jedním z předpokladů tvůrčího řešení problémů. Je nutné si uvědomit, že geometrie je pro žáky prvního stupně velice obtížná, jelikož některé geometrické pojmy v realitě neexistují (abstraktní pojmy) a jsou pouze v našem vědomí. Vezmeme-li v potaz fakt, že abstrakce se plně rozvíjí kolem jedenáctého roku života jedince, dostaneme se k závěru, že snaha o abstrakci u žáků prvního stupně nemusí vždy vést k úspěchu. Geometrické představy a objekty lze obvykle jednoduše graficky znázornit. Mohou tak být efektivnějšími nositeli než verbální nebo algebraický symbolický zápis.

Z obsahového hlediska je možné učivo geometrie na prvním stupni rozdělit do tří základních složek:

- Objekty, na které je zaměřený výklad.

  Zde se jedná o základní útvary (čtverec, trojúhelník, těžiště), vztahy (rovnoběžnost, kolmost, prázdný a neprázdný průnik), konstantní veličiny (obsah, obvod) a různé transformace (shodnost, stejnolehlost, skládání zobrazení).

- Metody, kterými se učivo zpracovává.

  Používají se metody jako vektorová analýza, syntetická metoda, kalkulativní metoda aj.

- Prostor, ve kterém se pohybujeme.

  Zpravidla se vychází pouze z prostorů E_1, E_2 a E_3 (jednorozměrný, dvojrozměrný a trojrozměrný euklidovský prostor).

Je jistě zřejmé, že ústředním pojmem při budování geometrických modelů je pojem abstrakce a abstrakčních přechodů. Podrobný rozbor jednotlivých abstrakčních přechodů je popsán v kapitole 2. Konstruktivismus. Pročtením této kapitoly:

- si osvojíte nejdůležitější teoretické pojmy a principy související s vyučováním,
- porozumíte základnímu rozdílu mezi transmisivním a konstruktivistickým vyučováním,

[1] Ottův slovník naučný, *Geometrie*, svazek 10, str. 34, (http:/ / www. archive. org/ stream/ ottvslovnknauni02ottogoog#page/ n34/ mode/ 2up)

- se seznámíte se základními principy konstruktivistického přístupu k vyučování matematice,
- osvojíte si elementární kompetence související s výukou matematiky konstruktivistickým způsobem.

2. Konstruktivismus

Na počátku konstruktivistických teorií a konstruktivismu jako celku stojí dvě významné osobnosti: Jean Piaget a Gaston Bachelard. Piaget své celoživotní experimentování shrnul slovy: „Padesát let experimentování nás naučilo, že neexistuje žádné poznání, které by bylo výsledkem pouhého zaznamenávání pozorovaného a jež by nebylo strukturováno aktivitou subjektu. Avšak (u člověka) neexistují ani žádné apriorní či vrozené struktury poznání – dědičnou je jedině sama činnost inteligence a z té se struktury rodí výlučně organizováním postupných aktivit vykonávaných s předměty. Plyne z toho, že epistemologie respektující psychogenetické danosti nemůže být ani empiristická, ani preformistická, může být chápána jedině jako konstruktivismus, v němž jsou nové operace a struktury průběžně vytvářeny" (J. Piaget, in: Bertrand, 1998, s. 65-66).

Piaget zde v podstatě popsal pedagogický konstruktivismus, který je chápán jako snaha o překonání transmisivního vyučování, jež je chápáno jako předávání definitivních vzdělávacích obsahů žákům, kteří jsou při tom odsouzeni do pasivní role jejich příjemců. Postupně se tak dostáváme k pojmu didaktický konstruktivismus, jež je chápán jako teorie, která zdůrazňuje proces konstruování poznatků učícím se subjektem.

Stehlíková (Vondrová) a Cachová (2006) na základě konstruktivistického přístupu stanovily pět tezí z pohledu učitele, které je důležité v hodinách dodržovat.

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.
3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.
4. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
5. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.

Didaktický konstruktivismus dal podnět ke vzniku mechanismu poznávacího procesu.

2.1 Mechanismus poznávacího procesu

Tímto mechanismem lze popsat vytváření pojmů, které je dle Hejného a Kuřiny (2009) dlouhodobým procesem konstruování poznatků, kdy základem jsou dva kvalitativní zdvihy. Tyto mechanismy je možné najít dva. Jeden před rokem 2001 a druhý po tomto roce. Druhý mechanismus poznávacího procesu je obměnou prvního a lze jej najít například v habilitační práci doc. Jirotkové (2010). V těchto skriptech se zaměříme primárně na novější mechanismus poznávacího procesu. Ten původní zmíníme v závěru a uvedeme základní rozdíl mezi těmito mechanismy.

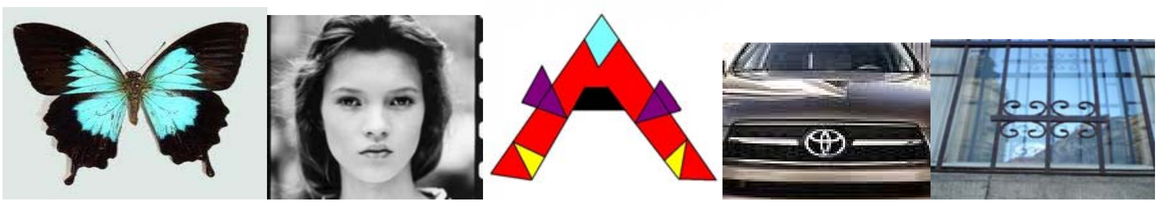
Celý mechanismus je zde popsán pomocí čtyř hladin a dvou hladinových přechodů, kdy druhá hladina je nadále dělena do pěti podhladin (první poznání, další modely, shlukování modelů, podstata stejnosti a obohacování modelů).

4. **hladina**	Krystalizace
2. **hladinový přechod**	Abstrakční zdvih
3. **hladina**	Generické modely
1. **hladinový přechod**	Zobecnění
2. **hladina**	Izolované modely
1. **hladina**	Motivace

V následujícím textu se zaměříme na podrobný popis tohoto mechanismu a ukážeme si, jak pomocí něj vyložit žákům osovou souměrnost.

1. hladina (Motivace)

Motivací je rozpor mezi neznám a chci znát. V případě osové souměrnosti je tak vhodné motivovat jejím využitím v běžném životě, kdy jedinec zjistí, že v postatě zná princip osové souměrnosti. Vhodnou motivací jsou také obrázky, které se stávají izolovanými modely.



2. hladina (Izolované modely)

Tyto modely lze rozdělit do pěti podhladin.

a) *První poznání*: prvním poznáním je v našem případě první obrázek, který dětem vyučující (nebo někdo jiný) představí jako příklad osové souměrnosti již v rámci motivace. Bude se tak jednat o prvotní setkání a zkušenost s tímto pojmem. Na tomto příkladě si žák vytvoří obraz o daném pojmu.

b) *Další modely:* do této části zapadají veškeré další modely, které jsou jedinci představeny jako příklady osové souměrnosti. Jsou to přesně ty modely, které jsou popsány jako izolované modely.

c) *Shlukování modelů:* U osové souměrnosti se žákům začnou některé obrázky jevit jako podobné na základě některých jejich vlastností, které ještě není schopen blíže specifikovat. Viz podobnost objektů zobrazených u motivace.

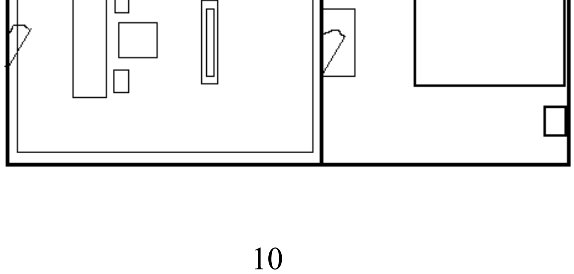
d) *Podstata stejnosti:* Jedinec již pozná, na jakém principu pracuje ona podobnost jednotlivých modelů. Je schopen říci, proč si jsou dané obrázky podobné. Pozná tak tedy, že se jedná o obrázky osově souměrné podle určité „čáry“, kterou se později naučí nazývat osou souměrnosti.

e) *Obohacování modelů:* na základě nalezení stejnosti z bodu „d“ (v tomto bodě dítě teprve vnímá, co spojuje jednotlivé osově souměrné objekty) jedinec do svého poznávacího procesu a do své kognitivní struktury zařazuje další modely splňující podmínky osové souměrnosti.

Těchto pět podhladin prostupují také modely překvapivé, modely zdánlivé a ne-modely.

Modely překvapivé

Překvapivým modelem osové souměrnosti může být například následující obrázek - pokoje s ložnicí v půdorysu (nebudeme-li uvažovat dveře, protože ty by osovou souměrnost porušovaly), kdy na první pohled není vidět, že se jedná o osově souměrný objekt. Jiným příkladem může být graf exponenciální funkce a k ní přikreslený graf její inverzní funkce.

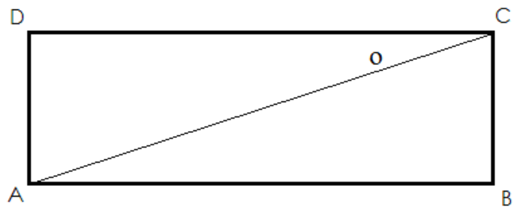


Modely zdánlivé

Zdánlivým modelem osové souměrnosti může být opět obrázek pokoje s ložnicí - s tím rozdílem, že nyní již dveře budeme uvažovat. Celý obrázek nasvědčuje skutečnosti, že se jedná o osově souměrný objekt, avšak při jeho bližším zkoumání zjišťujeme, že není.

Ne-modely

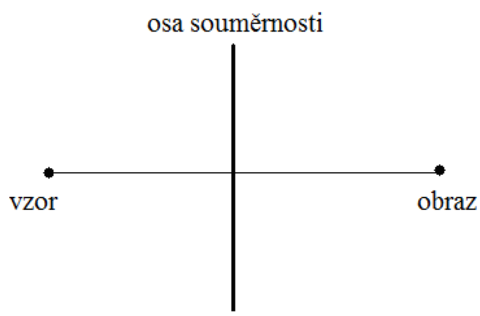
Ne-modelem je v případě osové souměrnosti obdélník, kdy za „osu souměrnosti" bude zvolena jeho úhlopříčka. Tyto modely se ve výuce využívají jako ukázka objektů, které nejsou osově souměrné podle dané osy.



3. hladina (Generický model)

Generický model je takový model, který je prototypem buď všech, nebo jen části izolovaných modelů. U osové souměrnosti se může například jednat o návod, jak poznat, že daný obrázek je osově souměrný, a na základě toho s ním také pracovat. Jedná se tedy o takový model, na kterém je jedinec schopen demonstrovat osovou souměrnost. Což je myšleno tak, že tento model žák aplikuje na všechny izolované modely, a je schopen o nich říci, že se jedná o osově souměrné objekty.

Těchto objektů může existovat více, pak záleží na jejich uspořádání v kognitivní struktuře jedince. Jeden z těchto modelů je přehýbání papíru. Druhý je zobrazen na následujícím obrázku.



4. hladina (Krystalizace)

Celé poznání se dostává na abstrakční úroveň a na základě krystalizace se propojuje na předchozí vědomosti. Jedinec již přesně zná principy osové souměrnosti, je schopen s nimi pracovat tak, že tyto principy aplikuje na všechny předcházející modely.

1. hladinový přechod (Zobecnění)

Jedná se o krátký okamžik, kdy jedinec odhalí závislost všech izolovaných modelů. Tento přechod je doprovázený tzv. AHA efektem.

Poznámka: AHA efekt je pozorovatelný jev, kdy je zřejmé, že žák pochopil princip dané problematiky.

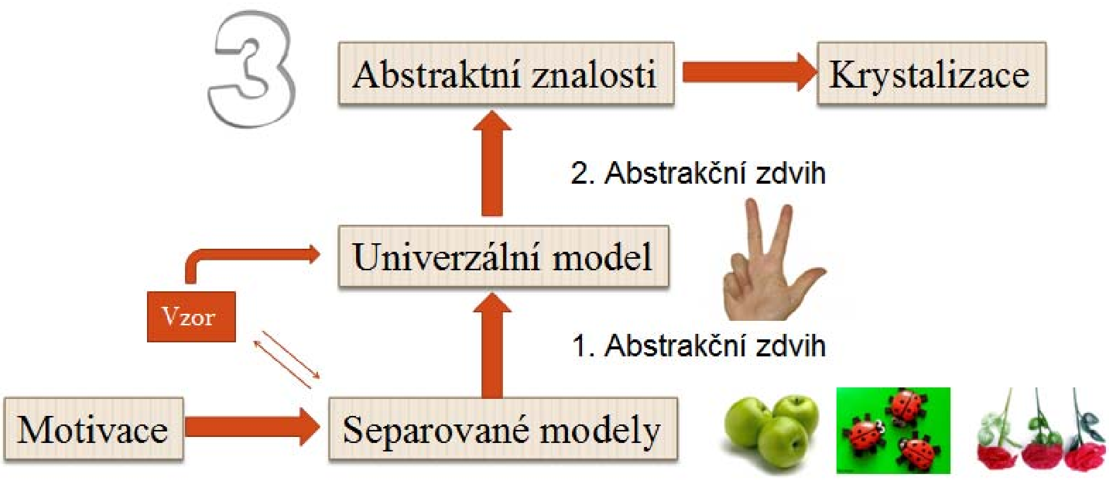
2. hladinový přechod (Abstrakční zdvih)

Jedná se o přechod z abstrakčně nižší úrovně na úroveň abstrakčně vyšší. Oproti prvnímu hladinovému přechodu je tento přechod zdlouhavým procesem a je doprovázený symbolizací.

Původní mechanismus poznávacího procesu

Na obrázku je dále znázorněn původní mechanismus poznávacího procesu doprovázený o obrázky, charakterizující jeho využití při výuce symbolu **3**.

?



Mezi tímto způsobem znázornění a novým mechanismem je několik rozdílů:

- separované modely jsou nadále označované jako izolované modely,
- univerzální model je nadále označován jako generický model,
- abstrakční zdvihy jsou nazývány hladinovými přechody,
- v novém mechanismu není zmíněný pojem vzor.

Právě pojem **vzor** je důvodem, proč zde zmiňujeme také tento mechanismus poznávacího procesu. Demonstrujme si problematiku vzoru na příkladě, kdy chceme žáka naučit pracovat se symbolem **3**.

Zprvu jsou žákovi předkládány separované modely v podobě trojic objektů s tím, že žák má najít jejich společný znak. Očekává se, že žák použije prsty (univerzální model) na to, aby zjistil, že mu vždy stačí tři ke spočtení těchto objektů. Pokud se to žákovi povede, dostává se prostřednictvím prvního abstrakčního zdvihu na úroveň univerzálního modelu. Pokud se mu to nepovede a učitel mu poradí (předá mu vzor), dostává se žák na pozici **vzor**, která nemá váhu univerzálního modelu.

Pokud se něco podobného stane, jsou dvě možnosti, jak nadále postupovat:

1. pravidelným opakováním si žák tento vzor zvnitřní (bude jej považovat za svůj) a dojde k oživení vzoru na univerzální model,
2. žák se vrátí na úroveň separovaných modelů a sám si najde jiný univerzální model.

2.1.1 Úlohy k zamyšlení

1. Jaký je základní rozdíl mezi prvním a druhým hladinovým přechodem?
2. Je motivace důležitá pouze na začátku hodiny nebo je nutné ji podporovat v průběhu celého výkladu?
3. Pokuste se popsat výklad aritmetické posloupnosti pomocí výše popsaného modelu.
4. Jak by vypadal ne-model, model a zdánlivý model u aritmetické posloupnosti?
5. Jak by vypadal ne-model, model a zdánlivý model u středové souměrnosti?
6. Popište základní rozdíly mezi prvním a druhým mechanismem poznávacího procesu (pro zodpovězení otázky je nutné čerpat z literatury v příloze).
7. Co může být generickým modelem při počítání?
8. Co je AHA-efekt?
9. Co je vzorem v mechanismu poznávacího procesu?
10. K čemu u dítěte vede předkládání vzorů učitelem?

3. Zobrazení

Dříve než budeme definovat pojem zobrazení, zopakujme si pojmy kartézský součin a relace.

Definice (kartézský součin) (Perný, 2010)

Kartézský součin množin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic, kde první prvek z této dvojice je prvkem množiny A a druhý prvek je prvkem množiny B.

$A \times B = \{[a,b]; a \in A \wedge b \in B\}$.

Definice (relace)

Relace z množiny A do množiny B (značíme ARB nebo $R(AB)$) je podmnožinou kartézského součinu $R \subset A \times B$.

Definice (zobrazení) (Bělík, 2005)

Relace z množiny A do množiny B se nazývá zobrazení z množiny A do množiny B právě tehdy, když každý prvek z množiny A je prvním prvkem nejvýše jedné uspořádané dvojice $[a,b]$, kde $a \in A \wedge b \in B$.

Platí: $(\forall a \in A, \forall b, b' \in B), [a,b] \in R \wedge [a,b'] \in R \Rightarrow b = b'$

Zobrazení se nazývá prosté (injektivní) právě tehdy, když každý prvek z množiny B bude obrazem nejvýše jednoho prvku množiny A. Jinými slovy: zobrazení se nazývá prosté právě tehdy, když každé dva různé vzory se zobrazí na dva různé obrazy.

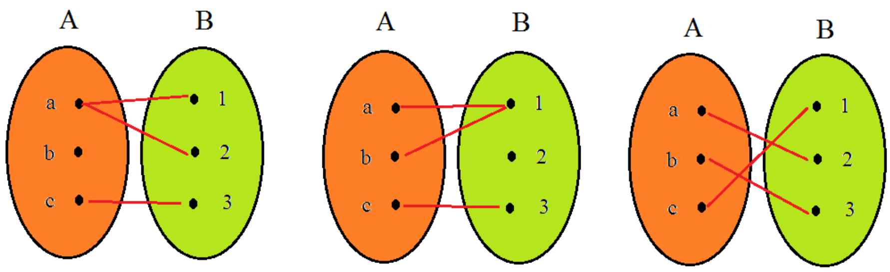
Prvkům z množiny A, které vstupují do zobrazení, říkáme **vzory** (tvoří první obor relace neboli **definiční obor**) a prvkům, které ze zobrazení vycházejí, říkáme **obrazy** (tvoří druhý obor relace neboli **obor hodnot**).

Definice: (Perný, 2010)

Mějme dáno zobrazení Z z množiny A do množiny B. První obor relace Z je množina $O_1(Z) = \{a \in A;\ (\exists b \in B); [a,b] \in Z\}$ a nazýváme ji definiční obor zobrazení Z. Druhý obor relace Z je množina $O_2(Z) = \{b \in B;\ (\exists a \in A); [a,b] \in Z\}$ a nazýváme ji oborem hodnot zobrazení Z.

Zobrazení je možné zapisovat třemi způsoby:

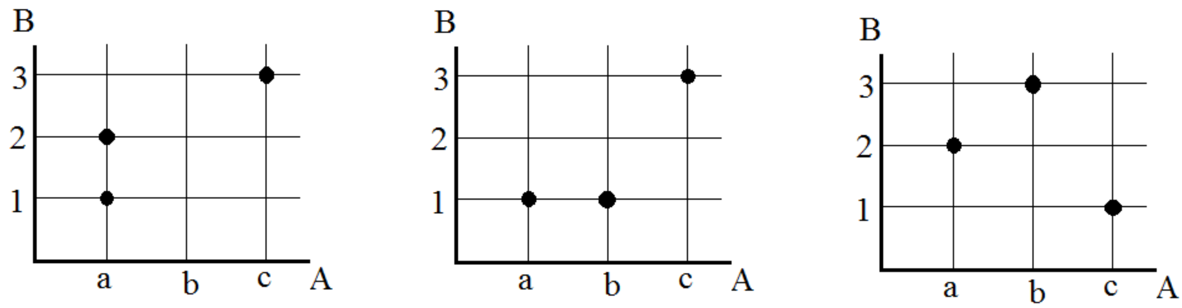
- uzlový graf – graf na obrázku níže. Z každého bodu množiny ***A*** vychází nejvýše jedna spojnice do množiny ***B***;
- kartézský graf – rýsuje se pomocí kartézské soustavy souřadnic. Na kolmici z každého bodu na ose ***x*** je nejvýše jeden bod;
- výpisem uspořádaných dvojic prvků. Relace na následujícím obrázku by výpisem prvků vypadala následovně:
    - není zobrazení {[a;1], [a;2], [c,3]}
    - je zobrazení, ale není prosté {[a;1], [b;a], [c,3]}
    - prosté zobrazení {[a;2], [b;3], [c,1]}



Není zobrazení

Je zobrazeni, ale není prosté

Prosté zobrazení



Není zobrazení

Je zobrazeni, ale není prosté

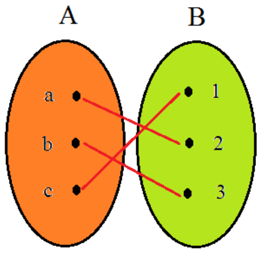
Prosté zobrazení

3.1 Možná zobrazení mezi množinami

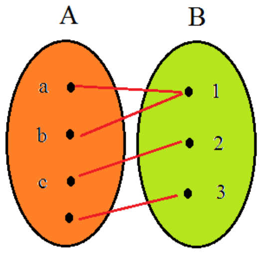
Tato zobrazení popíšeme slovně, pomocí prvního a druhého oboru relace, grafem a pomocí vhodné úlohy srozumitelné pro žáka základní školy.

a) Zobrazení množiny *A* na množinu *B*

Toto zobrazení existuje pouze v případě, kdy platí $O_1(R) = A \wedge O_2(R) = B$.



Prosté



Není prosté

Příklad (prosté zobrazení):

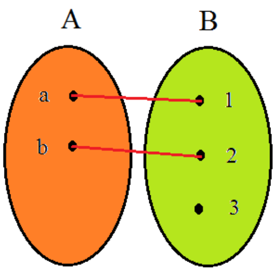
Paní učitelka rozdává dětem bonbóny. V bonboniéře má stejný počet bonbónů, jako je počet dětí, a každé dítě dostane právě jeden bonbón.

Příklad (zobrazení, které není prosté):

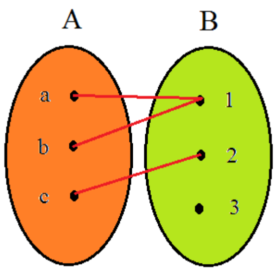
Paní učitelka rozdává dětem bonbóny. V bonboniéře je větší počet bonbónů, než je počet dětí a paní učitelka rozdá všechny bonbóny (každé dítě dostane bonbón, ale některé jich dostane více).

b) Zobrazení množiny *A* do množiny *B*

Toto zobrazení je možné pouze v případě, kdy platí $O_1(R) = A \wedge O_2(R) \subset B$.



Prosté



Není prosté

Příklad (prosté zobrazení)

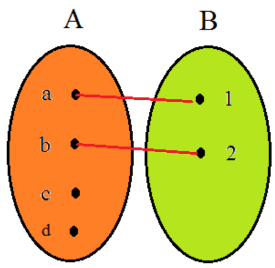
Maminka koupila svým třem dětem nanuky. Ovšem jeden z nich zapomněla v nákupním košíku. Jedno dítě tak nemělo nanuk.

Příklad (zobrazení, které není prosté)

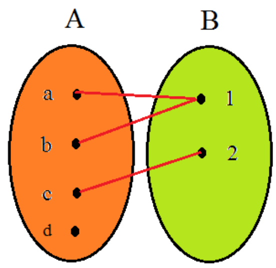
Maminka koupila svým třem dětem nanuky. Nejstarší zlobilo, a tak žádný nanuk nedostalo. Oproti tomu nejmladší bylo pochváleno a dostalo hned dva.

c) Zobrazení z množiny *A* na množinu *B*

Toto zobrazení je možné pouze v případě, kdy platí $O_1(R) \subset A \wedge O_2(R) = B$.



Prosté



Není prosté

Příklad (prosté zobrazení)

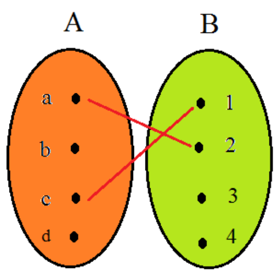
Maminka koupila čtyři nanuky. Protože má jen dvě děti, dva nanuky jim dala a dva ji zůstaly.

Příklad (zobrazení, které není prosté)

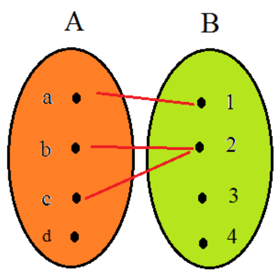
Maminka koupila čtyři nanuky. Každému ze svých dvou dětí dala po jednom, a protože Anička dostala jeničku z matematiky, dostala o jeden nanuk více.

d) Zobrazení z množiny *A* do množiny *B*

Toto zobrazení je možné pouze v případě, kdy platí $O_1(R) \subset A \wedge O_2(R) \subset B$.



Prosté



Není prosté

Příklad (prosté zobrazení)

Paní učitelka rozdávala dětem odměny za jedničky. Měla jich připravených dost pro každého žáka, ale protože jedničku dostala jen polovina dětí, pak také pouze polovina dostala odměnu.

Příklad (zobrazení, které není prosté)

Paní učitelka rozdávala dětem odměny za jedničky. Měla jich připravených dost pro každého žáka, ale protože jedničku dostala jen polovina dětí, pak také pouze polovina dostala odměnu. Jelikož Pepíček dostal dvě jedničky, dostal také dvě odměny.

Platí:

- Je-li zobrazení Z prosté, pak k němu existuje zobrazení inverzní Z^{-1}.
- Není-li zobrazení Z prosté, pak k němu neexistuje zobrazení inverzní Z^{-1}.

S pojmem zobrazení úzce souvisí pojem **ekvivalence množin**.

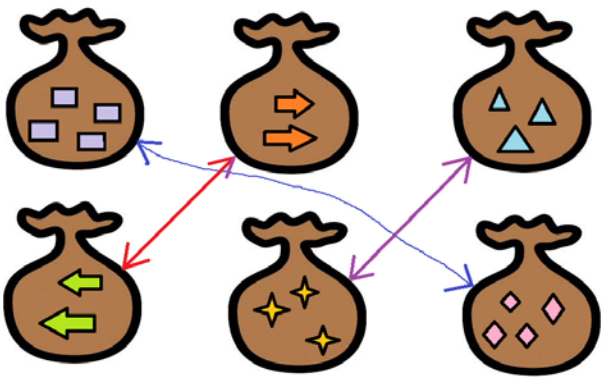
Definice

Množiny A a B jsou navzájem ekvivalentní právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme $A \approx B$.

Platí:

- „Ekvivalence v množině M je relace, která je v této množině reflexivní, symetrická a tranzitivní“ (Bělík, 2005).
- Relace $A \approx B$ je relací ekvivalence na třídě všech množin.
- Každá relace ekvivalence rozkládá množinu na níž je definována na třídy navzájem ekvivalentních prvků.

Didaktická poznámka: Význam výše zmíněných tří vět je možné formulovat také následovně: množiny jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejný počet prvků a existuje zobrazení jedné množiny na druhou (platí pro konečné množiny). V každé třídě rozkladu tak budou množiny o stejném počtu prvků. S těmito pojmy žák intuitivně pracuje. Již do prvního ročníku základní školy je možné zařadit úlohy, kdy žák spojuje množiny o stejném počtu prvků viz. obrázek.



Aby bylo zobrazení vzájemně jednoznačné (bijektivní), musí být prosté (injektivní) a **na množinu** (surjektivní).

Definice (injekce) (Matoušek, 2007)

Nechť *A, B* jsou dvě různé množiny. Zobrazení $Z\colon A \to B$ se nazývá injekce, nebo též prosté zobrazení, jestliže $(\forall b \in B)(\forall a, a' \in A)(Z(a) = b \wedge Z(a') = b \Rightarrow a = a')$.

Definice (surjekce) (Matoušek, 2007)

Nechť *A, B* jsou dvě různé množiny. Zobrazení $Z\colon A \to B$ se nazývá surjekce, nebo též zobrazení na množinu *B*, pokud $O_2(Z) = B$.

Definice (bijekce) (Matoušek, 2007)

Zobrazení $Z\colon A \to B$ se nazývá bijekce, bijektivní nebo též vzájemně jednoznačné zobrazení z množiny *A* na množinu *B* právě tehdy, když je injekce a současně surjekce.

Z definic injekce a surjekce ihned plyne, že máme-li dvě různé množiny *A, B* a zobrazení $Z\colon A \to B$, které je bijekcí, pak inverzní relace Z^{-1} k relaci *Z* je opět zobrazením. Říkáme, že zobrazení $\boldsymbol{Z^{-1}}$ **je inverzní zobrazení k zobrazení *Z***.

Jelikož zobrazení je specifickým případem relace, definujeme skládání zobrazení obdobně, jako skládání relací.

Definice (skládání zobrazení)

Mějme dány tři různé množiny *A, B, C* a zobrazení $Z_1\colon A \to B$, $Z_2\colon B \to C$. Složením těchto dvou zobrazení získáme relaci $Z_3 = Z_1 \circ Z_2$, která je opět zobrazení a platí $Z_3\colon A \to C$. Toto zobrazení je dáno předpisem $(\forall a \in A)((Z_1 \circ Z_2)(a) = Z_1(Z_2(a)))$.

V případě množiny všech bijekcí na množině *A* platí:

Skládání zobrazení má tyto vlastnosti:

- je asociativní,
- má neutrální prvek (tímto neutrálním prvkem je identita),
- Ke každému zobrazení existuje inverzní zobrazení,
- **není** komutativní.

Definice (Perný, 2009)

Pokud platí, že $Z \circ Z = I$ pak zobrazení *Z* se nazývá **involutorní**. Musí platit, že $Z \neq I$.

Platí:

- Jestliže jsou prvky O_1R a O_2R čísla, pak dané zobrazení nazýváme **funkce**.
- Jestliže jsou prvky O_1R a O_2R množiny bodů (geometrické objekty), nazýváme toto zobrazení geometrické.

3.1.1 Úlohy k procvičení

1. Na množině $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ je dána relace $R = \{(x, y) \in X \times X; x \mid y\}$. Zapište R výčtem prvků. Určete první a druhý obor relace. Nalezněte inverzní relaci.
2. Nechť $R_1 = \{ (1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8) \}$, $R_2 = \{ (2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u) \}$. Zapište výčtem prvků relace R^{-1}_1, R^{-1}_2, $R_2 \circ R_1$, $(R_2 \circ R_1)^{-1}$, $R^{-1}_1 \circ R^{-1}_2$.
3. Zakreslete zobrazení z množiny A na množinu B pomocí kartézského grafu. Zadání množin A a B ponecháváme čtenáři. Vymyslete úlohu, na které budete tuto úlohu prezentovat dítěti prvního stupně základní školy.
4. Zapište zobrazení množiny A do množiny B výčtem prvků. Zadání množin A a B ponecháváme čtenáři. Vymyslete úlohu, na které budete tento příklad prezentovat dítěti prvního stupně základní školy.
5. Zakreslete zobrazení z množiny A na množinu B pomocí uzlového grafu. Zadání množin A a B ponecháváme čtenáři. Vymyslete úlohu, na které budete tento příklad prezentovat dítěti prvního stupně základní školy.

3.2 Shodná zobrazení a různé typy shodností v rovině

Definice (Bělík, 2005)

Prosté zobrazení v rovině se nazývá **shodným zobrazením** v rovině nebo krátce **shodností** právě tehdy, když pro každé dva body X, Y této roviny a jejich obrazy $Z(X) = X'$, $Z(Y) = Y'$ platí $XY \cong X'Y'$ tedy $|X'Y'| = |XY|$, tj. **shodnost zachovává délku úsečky.**

Základní pojmy

Geometrickým zobrazením Z v rovině nazýváme zobrazení dané roviny na sebe sama, které každému body X této roviny přiřadí právě jeden bod X' z téže roviny. Bod X nazýváme vzorem a bod X' obrazem. Zapisujeme $Z: X \rightarrow X'$.

Samodružný bod

je takový bod, pro který platí $X = X'$. Jedná se o bod, který se zobrazí sám na sebe.

Samodružný útvar

je útvar, pro který platí $U = U'$. Jedná se o útvar, který se zobrazí sám na sebe.

Identita (identické zobrazení)

je zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný.

Platí:

- Obrazem polopřímky je polopřímka a obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.
- Obrazem přímky je přímka a obrazem rovnoběžných přímek jsou znovu rovnoběžné přímky.
- Obrazem poloroviny je polorovina a obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
- Obrazem úhlu je úhel s ním shodný.

Shodnost útvarů: Dva útvary jsou shodné právě tehdy, když existuje shodné zobrazení jednoho na druhý, tedy $Z(U_1) = U_2$. (Bělík, 2005)

3.2.1 Osová souměrnost

Definice (Boček, 1980)

Je dána přímka *o*. **Osová souměrnost** s osou *o* je shodné zobrazení ***O****(o),* které přiřazuje:

1. Každému bodu *X* neležícímu na ose *o* bod *X'* tak, že přímka *o* je osou úsečky *XX'*.
2. Každému bodu *Y* ležícímu na ose *o* bod *Y' = Y*.

Označení *O[o]*. Velké O symbolizuje osovou souměrnost, malé *o* značí, podle čeho zobrazujeme (jedná se o popisek osy, podle které zobrazujeme).

Určenost: Osová souměrnost je určená osou *o*.

Samodružné body: všechny body na ose *o*.

Samodružné objekty: samotná osa, přímky k této ose kolmé, roviny, ve které tato osa leží ap.

Vlastnosti osové souměrnosti:

- Zachovává rovnoběžnost.
- Zachovává dělící poměr.
- Obrazem úsečky je úsečka s ní shodná.

Využití osové souměrnosti

- Důkazy o vlastnostech geometrických útvarů.
- Konstrukce některých geometrických útvarů.

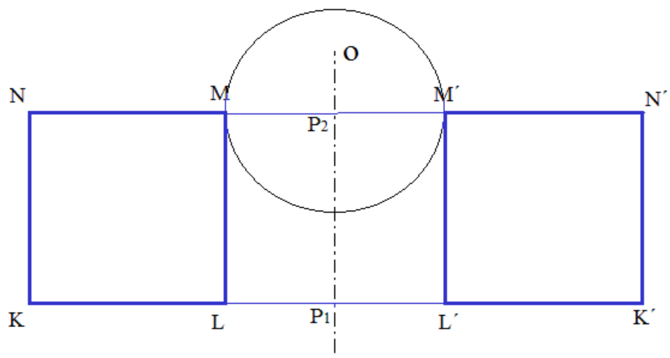
Řešená úloha

!!!

Zobrazte čtverec *KLMN* v osové souměrnosti podle osy *o*.

Postup konstrukce (slovní popis)

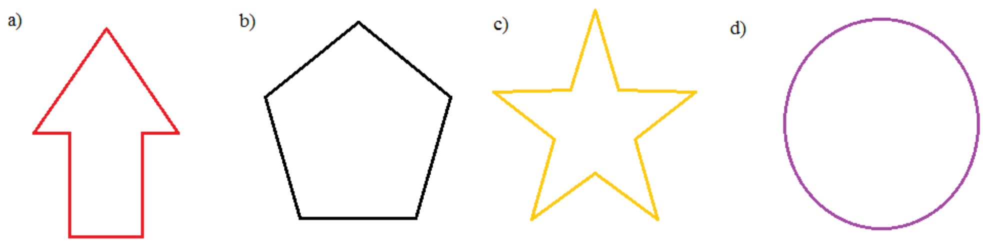
1. Vedeme kolmici k ose *o* procházející bodem *K*. Vznikne bod P_1.
2. Naneseme úsečku KP_1 na opačnou polopřímku ← P_1K. Vznikne bod K'. Platí, že $|KP_1| = |P_1K'|$. Toto přenášení vzdáleností provádíme pomocí kružítka.
3. Postup opakujeme pro všechny vrcholy čtverce *KLMN*.



Řešená úloha

Rozhodněte, které z následujících útvarů jsou osově souměrné, a kolik mají os souměrnosti.

!!!



a) Jedna osa souměrnosti b) není osově souměrný c) Šest os souměrnosti d) nekonečně mnoho

Didaktická poznámka: *budete-li zadávat úlohu založenou na osové souměrnosti, pak je nutné také náčrtek (na tabuli nebo do papíru). Pokud toto neuděláte, žáci téměř s jistotou vymyslí zadání, které nebude řešitelné nebo se na papír nevejde. Mělo by platit, že náčrtek by měl obsahovat všechny speciální vlastnosti uvedené v zadání, ale nic dalšího navíc.*

3.2.1.1. Skládání osových souměrností

Poznámka: Doporučujeme pročtení této kapitoly až po přečtení celé podkapitoly 3.2, jelikož se zde pracuje s pojmy, které doposud nebyly vysvětleny.

Každou shodnost v rovině lze vyjádřit pomocí skládání maximálně tří osových souměrností.

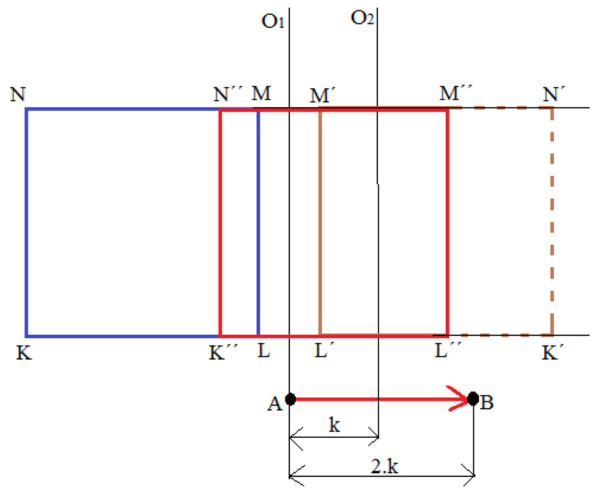
Nadále uvádíme příklady shodných zobrazení vzniklých pomocí skládání osových souměrností.

1. Posunutí

Posunutí je možné získat pomocí dvou rovnoběžných os souměrnosti. Velikost vektoru posunutí bude dvojnásobná, než je vzdálenost těchto os.

Řešená úloha:

Posuňte čtverec $KLMN$ o vektor $\overrightarrow{AB}$ pomocí skládání os souměrnosti.



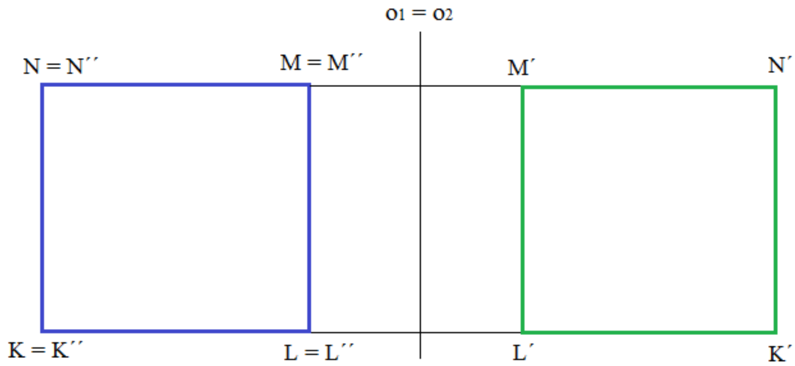
Při konstrukci postupujeme tak, že nejdříve zobrazíme čtverec $KLMN$ podle osy o_1 a získáme čtverec $K'L'M'N'$. Následně jej zobrazíme čtverec $K'L'M'N'$ podle osy o_2 a získáme výsledný čtverec $K''L''M''N''$.

2. Identita

Identitu je možné získat pomocí dvou totožných os souměrnosti.

Řešená úloha

Mějme dán čtverec *KLMN*. Vytvořte identitu pomocí skládání os souměrnosti.



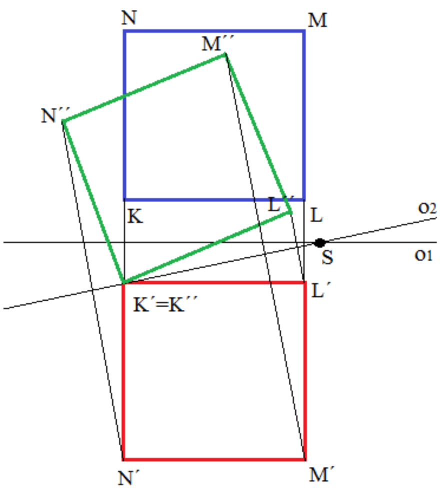
Postup: převrátíme čtverec *KLMN* podle osy o_1 a následně jej převrátíme zpět podle téže osy.

3. Otočení

Otočení je možné získat složením dvou různoběžných os souměrnosti. Otočení bude mít dvojnásobný úhel, než svírají tyto dvě osy.

Řešená úloha

Otočte čtverec *KLMN* podle bodu *S* o úhel 30°.



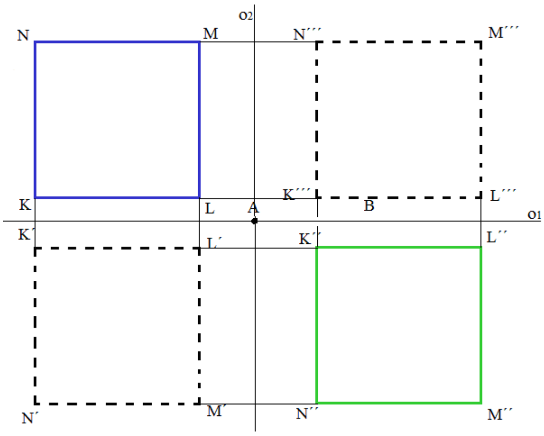
V tomto případě je nutné, abychom zobrazovali nejdříve podle osy o_1 a následně podle osy o_2. Pokud bychom zvolili opačný postup, byl by výsledný úhel otočení $\alpha' = -30°$.

4. Středová souměrnost

Středovou souměrnost získáme složením dvou osových souměrností s kolmými osami. V tomto případě nezáleží na pořadí, ve kterém budeme osové souměrnosti (zobrazení) skládat.

Řešená úloha

Zobrazte čtverec *KLMN* podle bodu *A*.



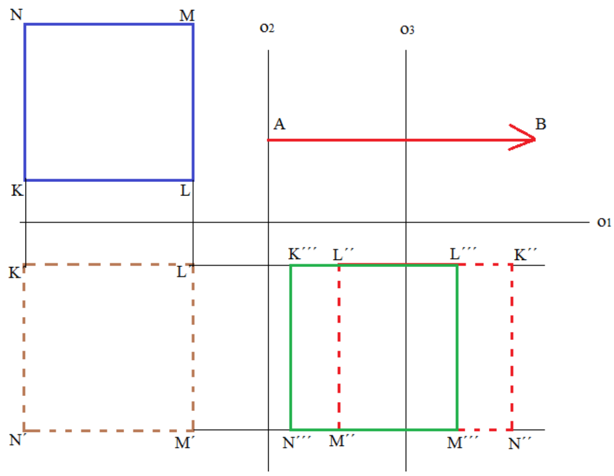
V tomto případě není podstatné, zda zobrazujeme nejdříve podle osy o_1 nebo osy o_2.

5. Posunutá souměrnost

Posunutá souměrnost vznikne složením tří osových souměrností, kde jsou dvě osy rovnoběžné a třetí osa je na ně kolmá.

Řešená úloha:

Mějme dánu osu *o* a vektor $\overrightarrow{AB}$. Zobrazte čtverec *KLMN* v posunuté souměrnosti, která je dána osou *o* a vektorem $\overrightarrow{AB}$ za pomoci skládání os souměrnosti.



Při konstrukci jsme ve skládání os postupovali v pořadí o_1, o_2, o_3.

Platí:

- Složením sudého počtu osových souměrností vznikne přímá shodnost.
- Složením lichého počtu osových souměrností vznikne nepřímá shodnost.

3.2.2 Středová souměrnost

Definice (Boček, 1980)

Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení v rovině, které je dáno předpisem:

1. Bod S se zobrazí sám na sebe (***Z(S) = S′***).
2. Každému bodu $X \neq S$ přiřazujeme bod X' roviny takový, který leží na polopřímce opačné k polopřímce $\rightarrow SX$, kdy platí, že bod S je mezi body X a X', tedy $|SX|=|SX'|$.

Označení *S[S]*. První S symbolizuje středovou souměrnost a druhé bod, podle kterého ji provádíme.

Určenost: středem S

Samodružné body: pouze bod S.

Samodružné objekty: přímky procházející bodem S, roviny, v kterých leží bod S.

Platí, že útvary, které jsou středově souměrné nazýváme **útvary středově souměrné**.

Vlastnosti středové souměrnosti:

- Zachovává rovnoběžnost.
- Zachovává dělící poměr.
- Obrazem úsečky je úsečka s ní shodná a rovnoběžná.
- Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.

Využití středové souměrnosti

- Důkazy o vlastnostech geometrických útvarů.
- Konstrukce některých geometrických útvarů.

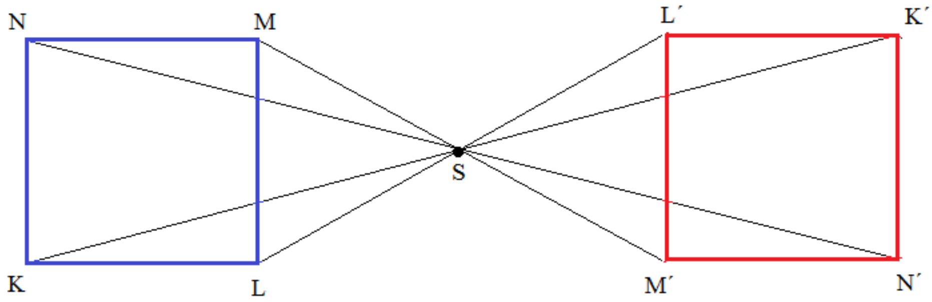
Řešená úloha

Zobrazte čtverec *KLMN* ve středové souměrnosti podle bodu S.

Postup konstrukce (slovní popis)

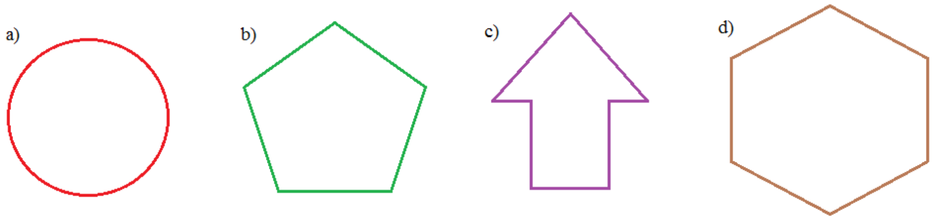
- Narýsujeme polopřímku $\rightarrow KS$.
- Naneseme úsečku KS na opačnou polopřímku $\leftarrow SK$. Vznikne bod K'. Platí $|KS| = |SK'|$

  Toto přenášení vzdáleností provádíme pomocí kružítka.
- Postup opakujeme pro všechny vrcholy čtverce *KLMN*.



Řešená úloha

Rozhodněte, které z následujících útvarů jsou středově souměrné.



a) Ano b) Ne c) Ne d) Ano

3.2.3 Posunutí

Definice (Boček, 1980)

Posunutí o vektor XX' je shodné zobrazení v rovině, pro které platí, že každému bodu A přiřadí bod A' takový, že $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{XX'}$.

Označení *T[XX´]*. Písmeno *T* symbolizuje posunutí (translaci) a body *XX´* vektor posunutí.

Určenost: Vektorem (směrem a velikostí)

Samodružné body: žádné (v případě nenulového vektoru posunutí).

Samodružné objekty: přímky rovnoběžné se směrem posunutí.

Vlastnosti posunutí:

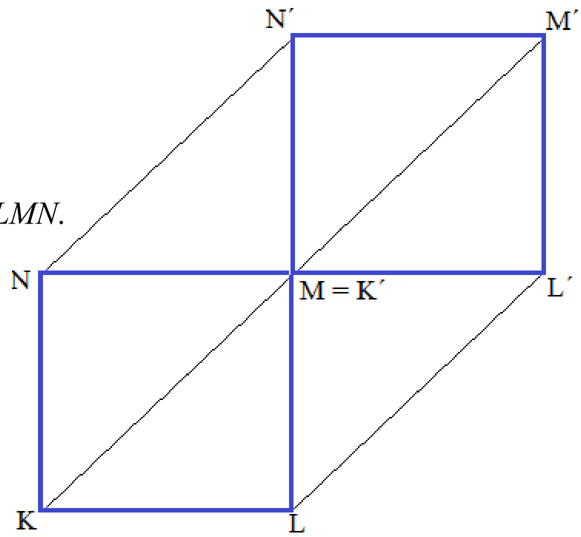
- Zachovává rovnoběžnost.
- Zachovává dělící poměr.
- Obrazem úsečky je úsečka s ní shodná.
- Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná nebo totožná.

Využití posunutí

- Konstrukce některých geometrických útvarů.

Řešená úloha

Posuňte čtverec *KLMN* o vektor *KM*.



Postup konstrukce (slovní popis)

- Narýsujeme vektor *KM*.
- Přesuneme tento vektor do každého vrcholu čtverce *KLMN*.
- Označíme výsledné body.

3.2.4 Otočení

Definice (Boček, 1980)

Otočení se středem S a úhlem α je shodné zobrazení, pro které platí:

1. Bodu S přiřadíme bod S', pro který platí $S = S'$.
2. Bodu $X \neq S$ přiřadíme bod X' dané roviny, pro který platí, že $|SX| = |SX'|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost α.

Označení *R[S, α]*. Písmeno *R* symbolizuje otočení (rotaci), bod S střed, podle kterého otáčíme a α úhel, o který otáčíme.

Určenost: středem a úhlem

Samodružné body: pouze střed S (v případě, že otočení není celočíselnými násobky úhlu 360^0)

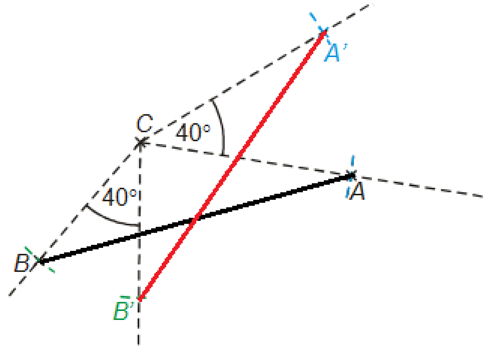
Samodružné objekty: obecně žádný

Vlastnosti otočení:

- Zachovává rovnoběžnost.
- Zachovává dělící poměr.
- Obrazem úsečky je úsečka s ní shodná.

Využití otočení:

- Důkazy o vlastnostech geometrických útvarů.
- Konstrukce některých geometrických útvarů.



Řešená úloha

Otočte úsečku AB o úhel 40^o kolem bodu C.

Postup konstrukce (slovní popis)

- Narýsujeme polopřímku CA.
- Sestrojíme polopřímu $\rightarrow CA'$ tak, aby platilo $|ACA'| = 40^o$.
- Přeneseme vzdálenost CA na polopřímku CA' tak, aby platilo $|CA| = |CA'|$.
- Postup opakujeme pro bod B.

3.2.5 Posunutá souměrnost

Definice [1]

Geometrické zobrazení v rovině, které vzniká složením osové souměrnosti a posunutí podél této osy se nazývá **posunutá souměrnost**.

Určenost: osou souměrnosti a vektorem posunutí.

Samodružné body: posunutá souměrnost nemá žádné samodružné body.

Samodružné objekty: žádné samodružné objekty

Poznámka: Toto skládání je komutativní, pořadí skládání osové souměrnosti a posunutí není rozhodující (viz následující úloha).

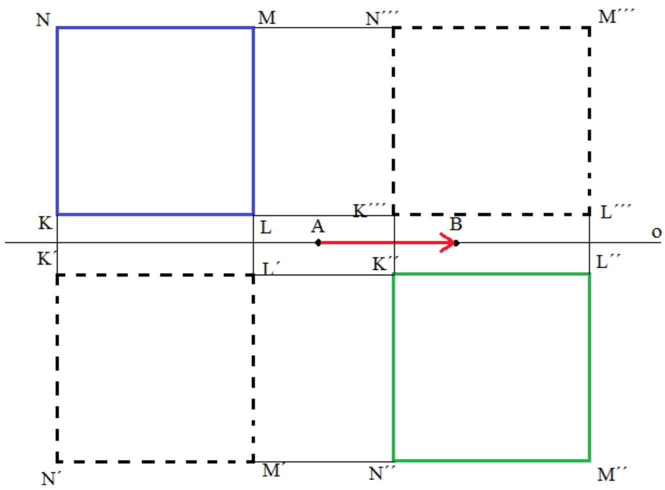
Řešená úloha

Zobrazte čtverec *KLMN* v posunuté souměrnosti, která je dána osou *o* a vektorem $\overrightarrow{AB}$.

Popis konstrukce

- Čtverec *KLMN* nejdříve zobrazení podle osy o (posuneme o vektor $\overrightarrow{AB}$). Získáme čtverec $K'L'M'N'$ ($K'''L'''M'''N'''$).

- Následně čtverec posuneme o vektor $\overrightarrow{AB}$ (zobrazíme podle osy *o*) a získáme čtverec $K''L''M''N''$.



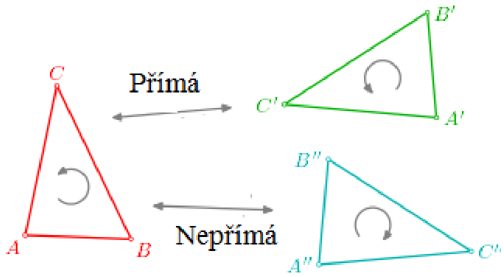
3.2.6 Základní vlastnosti shodných zobrazení

- Obrazem každé úsečky *AB* je úsečka $A'B'$ s ní shodná ($|A'B'|=|AB|$).
- Obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky, tj. shodnost zachovává rovnoběžnost.
- Obrazem každého trojúhelníka *ABC* je trojúhelník $A'B'C'$ s ním shodný.
- Shodná zobrazení v rovině společně s operací skládání tvoří nekomutativní grupu.

Rozdělení shodností

- **Přímá shodnost** – vzor a obraz jsou zobrazeny v přímé shodnosti právě tehdy, když mají shodnou orientaci bodů:
  - identita,
  - posunutí (translace),
  - otočení (rotace),
  - středová souměrnost.

- **Nepřímá shodnost** - vzor a obraz jsou zobrazeny v nepřímé shodnosti právě tehdy, když nemají shodnou orientaci bodů:
    - osová souměrnost,
    - posunutá souměrnost.



[2]

Poznámka: Přímou shodnost je možné dětem předat pomocí papíru, kde na jedné straně je velké písmeno A (případně obrázek) a na druhé písmeno B (případně jiný obrázek). V přímé shodnosti bude vždy vidět písmeno A (nedojde k převrácení papíru). V nepřímé shodnosti bude místo písmene A vidět písmeno B.

Platí:

- Složením **přímých** shodností vznikne **přímá** shodnost.
- Složením **sudého** počtu **nepřímých** shodností vznikne **přímá** shodnost.
- Složením **lichého** počtu **nepřímých** shodností vznikne **nepřímá** shodnost.

Věty o shodnosti trojúhelníků

- *Věta sss* (strana, strana, strana)

Každé dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve třech stranách.

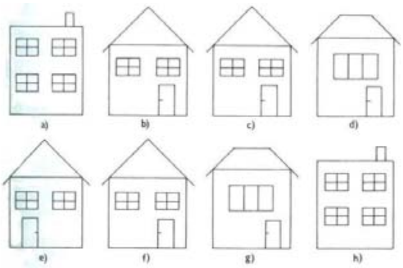
- *Věta sus* (strama, úhel, strana)

Každé dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.

- *Věta usu* (úhel, strana, úhel)

Každé dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých, jsou shodné

3.2.7 **Úlohy k procvičení** [3]



1. Určete shodné obrazce

a) Které obrazce jsou osově souměrné?

b) Které obrazce jsou středově souměrné.

2. V rovině zvolte 6 různých bodů *K, L, M, N, O, P*.

Narýsujte jejich obrazy v osové souměrnosti s osou $o = \leftrightarrow LO$. Body volte tak, aby:

a) obrazy bodů *K, M* ležely ve stejné polorovině s hraniční přímkou o jako body *N, P,*

b) obrazy bodů *K, M* ležely v opačné polorovině s hraniční přímkou o, než body *N, P,*

c) body *K, M, N, P* byly samodružné.

3. Sestrojte obraz libovolného obdélníku *ABCD* v osové souměrnosti s osou *o*, která prochází:

a) body *AB,*

b) s obdélníkem má společný pouze bod *C,*

c) body *AC*.

4. Sestrojte obraz přímky *p* v osové souměrnosti s osou *o*, jestliže přímky *p* a *o* jsou:

a) rovnoběžné a nejsou totožné,

b) totožné,

c) na sebe kolmé,

d) různoběžné.

5. Sestrojte obraz dané úsečky ve středové souměrnosti s daným středem *S*, jestliže

a) bod *S* na této úsečce neleží,

b) bod *S* je jejím krajním bodem,

c) bod *S* je jejím vnitřním bodem.

6. Narýsujte pravidelný šestiúhelník *ABCDEF* se stranou délky 3 cm. Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem *A*. Proveďte stejnou konstrukci pomocí skládání os souměrnosti.

7. Jsou dány tři různé body *A, B, C*, které neleží v přímce. V posunutí určeném orientovanou úsečkou *AB* sestrojte obraz

a) úsečky *AC,*

b) bodu *C*,

c) přímky *BC.*

8. Je dán obdélník *KLMN* k = 2,8 cm, l = 1,8 cm. Sestrojte jeho obraz $K'L'M'N'$ v posunutí daném orientovanou úsečkou *KM*. Dále sestrojte obraz $K''\ L''\ M'\ N''$ obdélníku $K'L'M'N'$ v osové souměrnosti s osou o, $o = \leftrightarrow KL$.

9. Je dán čtverec *ABCD* a = 5 cm. Bod *S* je průsečík úhlopříček čtverce. Sestrojte kružnici *k*, která je určena bodem *S* a poloměrem 2 cm. Bod *X* leží na polopřímce *AS* */AX/* = 8 cm. Obrazec otočte:

a) podle bodu A o úhel + 45º,

b) podle bodu B o úhel + 90º,

c) podle bodu S o úhel – 45º,

d) podle bodu S o úhel + 90º,

e) podle bodu X o úhel - 90º,

f) podle bodu X o úhel + 180º.

10. Je dán obdélník *ABCD* *A* ≡ [-5; -3] *B* ≡ [-1; -3] *C* ≡ [-1; +1] *D* ≡ [-5; +1]. Dále známe body *M* ≡ [-3; -2] *N* ≡ [+1; +3]. Sestrojte obdélník středově souměrný podle bodu *M*, nově vzniklý obdélník zobrazte ve středové souměrnosti podle bodu *N* a nakonec posledně vzniklý obdélník zobrazte středově souměrný podle bodu *O*. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

11. Kolik středových a osových souměrností má

a) tetraedr,

b) pravidelný čtyřboký jehlan,

c) pravidelný trojboký hranol,

d) rotační kužel,

e) koule?

12. Je dán trojúhelník ABC $A \equiv [-4; -2]$ $B \equiv [-1; +2]$ $C \equiv [+2; +1]$. Dále známe body $K \equiv [-3;-2]$, $L \equiv [+1; 0]$, $M \equiv [0; 0]$. Sestrojte trojúhelník v osové souměrnosti podle přímky KL. Nově vzniklý trojúhelník zobrazte ve středové souměrnosti podle bodu M. Poslední vzniklý trojúhelník zobrazte v posunutí KM.

13. Řešte úlohy 7 – 11 pomocí skládání os souměrnosti.

14. Které souměrnosti jsou přímé a které nepřímé?

15. Jakou souměrnost získáme složením:

a) sudého počtu přímých shodností,

b) sudého počtu nepřímých shodností,

c) lichého počtu přímých shodností,

d) lichého počtu nepřímých shodností?

3.3 Podobná zobrazení

Definice (Perný, 2009)

Prosté zobrazení Z se nazývá podobné právě tehdy, když pro každé dva různé body A, B a jejich obrazy $Z(A) = A'$, $Z(B) = B'$ platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$, kde k je kladné reálné číslo a nazývá se poměr podobnosti.

Platí:

- Je-li $k < 1$ hovoříme o zmenšení.
- Je-li $k = 1$ hovoříme o shodnosti.
- Je-li $k > 1$ hovoříme o zvětšení.

Poznámka: Vlastnosti podobných zobrazení, pokud jde o zobrazení přímek, polopřímek, polorovin a úhlů, jsou stejné jako vlastnosti shodných zobrazení.

Poznámka: Podobná zobrazení zachovávají poměr všech navzájem si odpovídajících stran a shodnost úhlů.

Platí:

- Podobná zobrazení dělíme na přímá a nepřímá podle orientace úhlu vzoru a jeho obrazu.

Věta:

Obrazem kružnice l (s poloměrem r) v podobnosti s koeficientem k je kružnice l' (s poloměrem $k.r$).

Věta:

Každé podobné zobrazení je prosté.

Díky druhé větě platí, že ke každému podobnému zobrazení Z existuje inverzní zobrazení Z^{-1} s koeficientem podobnosti $\frac{1}{k}$.

Definice (Perný, 2009)

Dva útvary U_1, U_2 jsou podobné právě tehdy, když existuje podobné zobrazení z jednoho útvaru na druhý $Z(U_1) = U_2$.

Podobnost značíme symbolem ~. Jsou-li si dva útvary podobné, zapisujeme $U_1 \sim U_2$.

Útvary „vždy podobné“

Úsečky, kružnice, pravidelné n-úhelníky, rovinné pásy aj.

Didaktická poznámka: nemusí platit, že každé dva trojúhelníky nebo obdélníky jsou si vždy podobné, avšak každé dvě úsečky, každé dvě kružnice, každé dva pravidelné n-úhelníky a každé dva rovinné pásy jsou si vždy podobné.

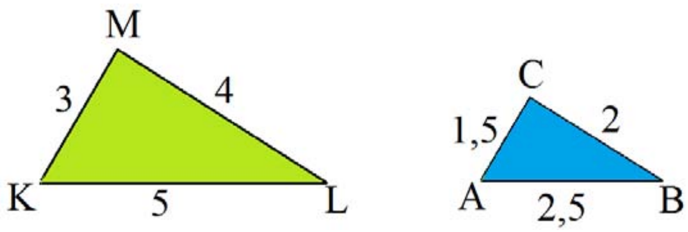
Tvrzení

Obsah S' obrazu U' útvaru U s obsahem S v podobném zobrazení s koeficientem k je k^2-násobkem obsahu S. Tedy platí $S' = k^2 \cdot S$.

Věty o podobnosti trojúhelníků [4]

Známe tři věty o podobnosti trojúhelníka.

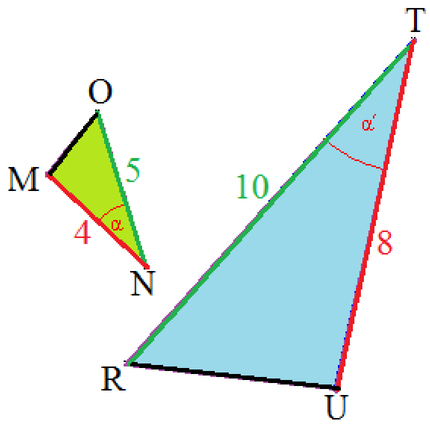
- **Věta *sss*** (strana, strana, strana) – dva trojúhelníky jsou si podobné právě tehdy, když všechny sobě odpovídající si dvojice stran jsou ve stejném poměru.



Tyto dva trojúhelníky si jsou podobné v poměru 1:2. Platí: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$.

Platí: $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m} = \frac{1}{2}$

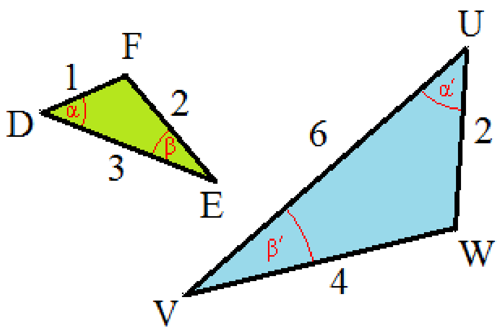
- **Věta *sus*** (strana, úhel, strana) - dva trojúhelníky jsou si podobné právě tehdy, když délky dvou sobě příslušejících dvojic stran jsou ve stejném poměru a úhly jimi sevřené jsou shodné.



Tyto dva trojúhelníky si jsou podobné v poměru 2:1. Platí: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$.

Platí: $\frac{r}{m} = \frac{u}{o} = \frac{2}{1} \wedge \alpha = \alpha'$

- **Věta *uu*** (úhel, úhel) – dva trojúhelníky jsou si podobné právě tehdy, když mají dva úhly shodné.



Tyto dva trojúhelníky jsou podobné v poměru 2:1. platí: $\Delta DEF \sim \Delta UVW$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$.

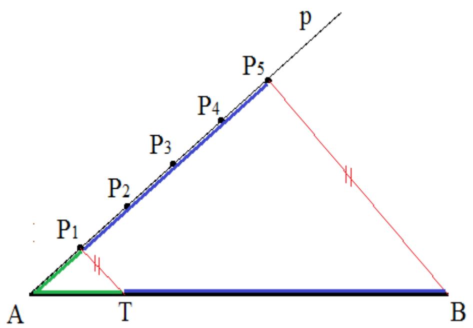
Platí: $\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta'$.

U věty ***uu*** navíc platí, že trojúhelníky se shodují ve všech třech úhlech.

Využití vět o podobnosti trojúhelníků

Věty o podobnosti trojúhelníků se využívají zpravidla při dělení úsečky na stejné části, případně dělení úsečky v témže poměru. Tyto věty budeme také nadále využívat u stejnolehlosti.

Ukázka 1 (Využití vět o podobnosti trojúhelníků)



Mějme dánu úsečku AB. Rozdělte tuto úsečku v poměru 1:4.

Postup:

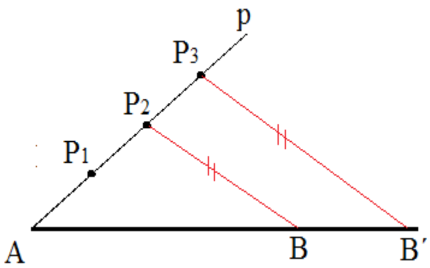
Od bodu A narýsujeme pomocnou polopřímku pod libovolným nenulovým úhlem.

Na tuto polopřímku vyneseme pět bodů ve stejném rozestupu (tato vzdálenost je libovolná).

Spojíme body P_5B a vedeme rovnoběžku do bodu P_1. Získaný bod T dělí úsečky AB v poměru 1:4. Platí: $\Delta AMP_5 \sim \Delta ATP_1$ podle věty *uu*.

Ukázka 2 (Využití vět o podobnosti trojúhelníků)

Mějme dánu úsečku AB. Změňte její velikost v poměru 3:2.



Od bodu A narýsujeme pomocnou polopřímku pod libovolným nenulovým úhlem.

Na tuto polopřímku vyneseme tři body ve stejné vzdálenosti (tato vzdálenost je libovolná).

Spojíme body P_2B a uděláme rovnoběžku do bodu P_3. Získáme bod B'.

Úsečka AB' je s úsečkou AB v poměru 3:2.

Platí: $\Delta ABP_2 \sim \Delta AB'P_3$ podle věty *uu*.

Speciálním příkladem podobnosti je **stejnolehlost.**

3.3.1 Stejnolehlost

Definice (Perný, 2009)

Zvolíme bod S prostoru E_2 (E_3) a reálné nenulové číslo k. Zobrazení, kde bod S je samodružný a ke každému bodu $X \neq S$, prostoru E_2 (E_3) sestrojíme obraz X' tak, že S, X, X' leží v přímce a platí $|SX'| = |k|.\ |SX|$ a pro $k > 0$ leží X' na $\rightarrow SX$, pro $k < 0$ leží X' na $\leftarrow SX$ se nazývá stejnolehlost se středem S a koeficientem k.

Označení *H[S, k]*. Písmeno *H* symbolizuje stejnolehlost (homotetii), bod *S* střed stejnolehlosti a *k* koeficient stejnolehlosti.

Určenost: středem a koeficientem stejnolehlosti

Samodružné body: střed *S*

Samodružné objekty: přímky procházející středem

Inverzní zobrazení

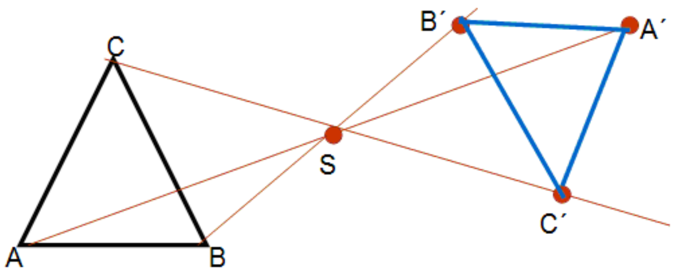
Inverzní zobrazení H_{-1} ke stejnolehlosti *H[S, k]* je $H^{-1}[S, 1/k]$.

Platí:

- Je-li $k = 1$, pak se stejnolehlost stává identitou.
- Je-li $k = -1$, pak se stejnolehlost stává středovou souměrností.
- Stejnolehlost s koeficientem *k* je podobné zobrazení s poměrem podobnosti $k = |k|$.
- Složením stejnolehlosti a shodného zobrazení získáme podobné zobrazení.

Řešená úloha

Mějme dán trojúhelník *ABC*. Zobrazte jej ve stejnolehlosti *H [S, -1]*.



Postup řešení (slovní popis)

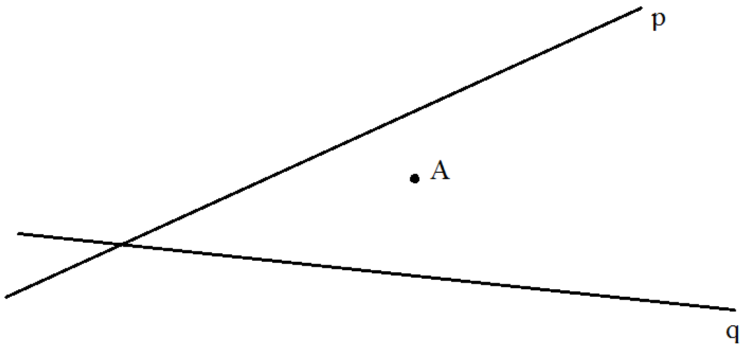
1. Narýsujeme přímku $\rightarrow AS$
2. Přeneseme bod A na opačnou polopřímku $\leftarrow SA$ ve vzdálenosti $|SA|$. Vznikne bod A'.

   Platí $|AS| = |SA'|$.
3. Stejný postup opakujme pro všechny body trojúhelníka ABC.

3.3.2 Úlohy k procvičení

1. Graficky sestrojte úsečky o velikosti $\sqrt{5}, \sqrt{17}, \sqrt{20}$.
2. Mějme dánu úsečku *AB* o velikosti 7 cm. Rozdělte tuto úsečku *AB* v poměru 3:5.
3. Narýsujte dvě kružnice a sestrojte jejich společné tečny.

4. Mějme dány přímky *p, q* a bod *A*. Nakreslete kružnici, kde přímky *p* a *q* jsou její tečny a bod *A* náleží této kružnici.



5. Rozdělte úsečku *CD* o velikosti 12 cm v poměru 2:3:4.

6. Mějte libovolnou úsečku AB. Sestrojte úsečku, jejíž délka je $\frac{3}{7}$ délky úsečky *AB*.

7. Mějte ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Sestrojte čtverec *KLMN* tak, aby body *KL* ležely na úsečce *AB*, bod *M* ležel na úsečce *BC* a bod *N* ležel na úsečce *AC*.

8. Mějme dány trojúhelníky ABC, MNO, GHI a RST. Zjistěte, které z nich jsou podobné a jaký mají poměr podobnosti.

   a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm

   m = 9 cm, n = 16 cm, c = 25 cm

   g = 10 cm, h = 8 cm, i = 6 cm

   r = 20 cm, s = 15 cm, t = 25 cm

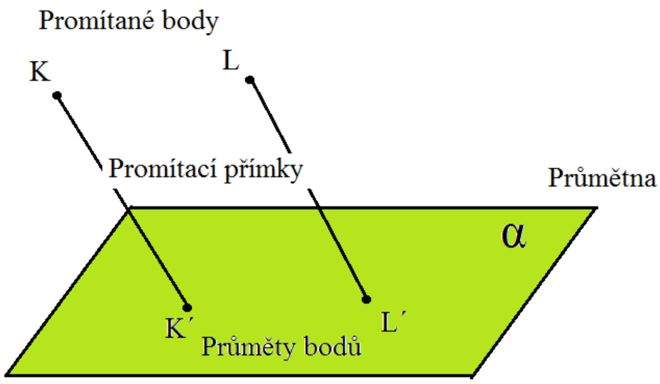
9. Jaké zobrazení získáme složením shodnosti a podobnosti?

10. Jaké známe věty o podobnosti trojúhelníků?

4. Promítání (Bělík, 2005) [9]

Promítání je zobrazování z prostoru E_3 na prostoru E_2. Jedná se tak tedy o rovinné vyjádření prostorových útvarů. Při tomto zobrazování přiřazujeme každému bodu z prostoru E_3 právě jeden bod v prostoru E_2 následovně:

1) Bodem (K nebo L) vedeme promítací přímku.
2) Sestrojíme průsečík promítací přímky a roviny, do které promítáme (průmětny). Tento průsečík se nazývá průmět bodu.
3) Popíšeme daný průmět (K' nebo L').



Podle toho, jaká je vzájemná poloha promítacích přímek, dělíme promítání na rovnoběžné (promítací přímky jsou rovnoběžné) nebo na středové (promítací přímky procházejí jedním bodem)

4.1 Rovnoběžné promítání

V případě rovnoběžného promítání určujeme několik zvláštních případů:

- Pravoúhlé promítání – směr promítacích přímek je kolmý na průmětnu (Mongeovo promítání).
- Kosoúhlé promítání – směr promítacích přímek je jiný, než kolmý k průmětně (je zřejmé, že není možné, aby tento směr byl rovnoběžný s průmětnou).
- Volné rovnoběžné promítání – zde volíme směr promítání (ten však není kolmý ani rovnoběžný).

Nejběžnějším a v praxi také nejvyužívanějším promítáním jsou volné rovnoběžné promítání a Mongeovo promítání. Proto se jim zde nyní budeme více věnovat.

4.1.1 Volné rovnoběžné promítání

Základní **pravidla** volného rovnoběžného promítání:

- Zobrazujeme na jednu svislou průmětnu (nárysnu).
- Plochy, které jsou rovnoběžné s naší rýsovací plochou, zobrazujeme jako shodný obraz (tvary i velikosti se zachovávají).

- Plochy, které svírají s naší rýsovací plochou pravý úhel, rýsujeme pod polovičním úhlem (45°).
- Úsečky, které leží v těchto kolmých rovinách a jsou kolmé na průčelnou rovinu, zobrazujeme v poloviční velikosti.

Poznámka: kolmé útvary se nemusí vždy kreslit pod úhlem 45° a v poloviční velikosti. Hovoříme zde pouze o nejběžnějším případě.

Vlastnosti volného rovnoběžného promítání:

- zachovává rovnoběžnost,
- zachovává dělící poměr.

Postup při zobrazování pomocí volného rovnoběžného promítání:

- Těleso postavíme tak, aby jedna stěna byla v průčelné poloze.
- Tuto průčelnou stěnu (přední) zobrazíme jako první.
- Z vrcholů této průčelné stěny vedeme hloubkové přímky pod určitým úhlem. Tento úhel bývá nejčastěji volen 45%.
- Hloubkové úsečky zobrazíme v poloviční velikosti.
- Zobrazíme všechny zbylé stěny.
- Vyznačíme viditelnost.

4.1.2 Mongeovo promítání – pravoúhlé promítání na dvě nebo na tři průmětny

Mongeovo promítání využívá rovnoběžného pravoúhlého promítání objektu do dvou na sebe kolmých rovin (průměten) - půdorysny (ve vodorovné poloze) a nárysny (ve svislé poloze). Nejprve promítáme kolmo na vodorovnou rovinu π (půdorysnu) – promítací přímky jsou svislé, jde tedy o pohled shora (půdorys). Poté promítáme kolmo na svislou rovinu ν (nárysnu) – promítací přímky jsou kolmé, jde tedy o pohled zepředu (nárys).

Základní **pravidla**:

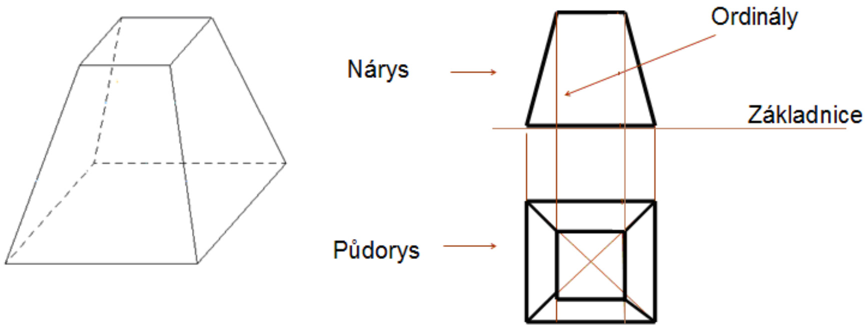
- Zobrazujeme kolmo na dvě (tři) průmětny .

- Nárysnu (pohled zepředu) – název odvozený od slova nárys
- Půdorysnu (pohled shora) – název odvozen od slova půdorys
- Bokorysnu (pohled z boku) – název odvozen od slova bokorys

Poznámka: Běžně se při Mongeově promítání zobrazuje pouze na nárysnu a půdorysnu a tak zde také budeme zobrazovat pouze na nárysnu a půdorysnu (pouze ze dvou pohledů).

- Nárys a půdorys tělesa tvoří tzv. sdružené průměty.
- Průsečnice těchto průměten se nazývá základnice.
- Kolmice na základnici se nazývá ordinála (na této ordinálách jsou sdružené průměty téhož bodu).
- Obrazce rovnoběžné s průmětnami se zobrazují ve skutečné velikosti.

Ukázkou Mongeova promítání včetně popisu základních pojmů je následující obrázek



Základní **vlastnosti** Mongeova promítání:

- zobrazení zachovává rovnoběžnost,
- zobrazení zachovává dělící poměr,
- zobrazení zachovává shodnost rovnoběžných úseček.

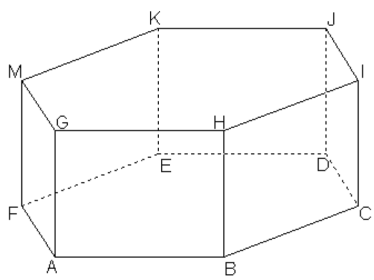
Didaktická poznámka: *Nárys se v Mongeově promítání zpravidla zakresluje tak, že „leží“ na ordinále, jelikož zobrazované těleso je „položeno“ na půdorysně.*

Vzhledem k názornosti popíšeme **postup** při zobrazování na konkrétní úloze.

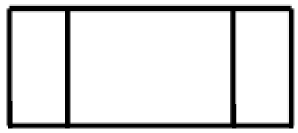
!!!

Řešená úloha:

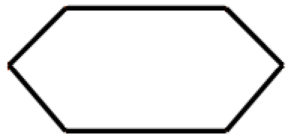
Zobrazte pravidelný šestiboký hranol v Mongeově promítání.



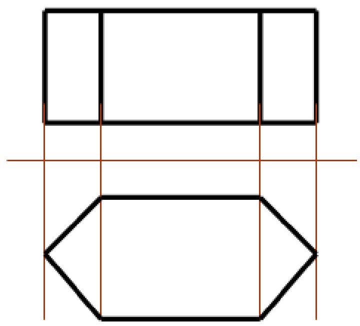
1. Těleso postavíme jednou stěnou v průčelné poloze (nárys – pohled zpředu)



2. Zobrazíme těleso na půdorysnu (půdorys - pohled shora)



3. Zobrazíme obrazy v obou průmětnách tak, aby průměty příslušných bodů ležely na ordinálách.



Při rýsování se základnice ani ordinály nezobrazují. Jedná se pouze o pomocné čáry.

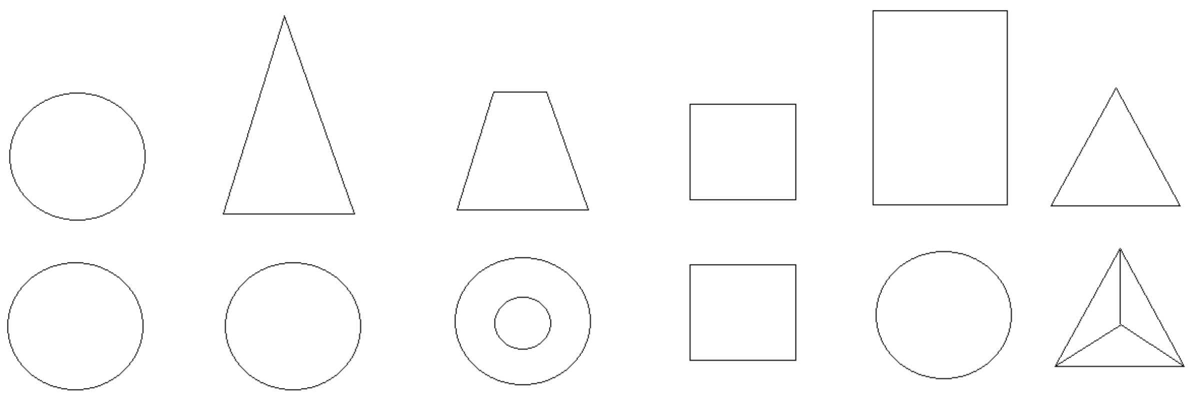
Výhody Mongeova promítání:

- zachovává velké množství rozměrů

Nevýhody mongeova promítání:

- není příliš názorné

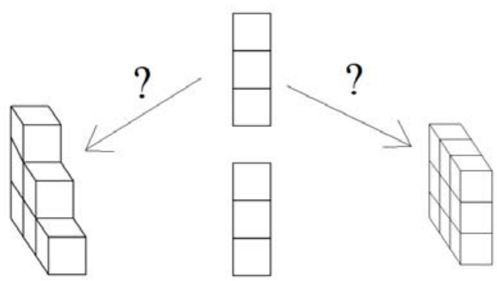
Ukázka těles v Mongeově promítání.



Koule | Kužel | komolý kužel | Krychle | Válec | Prav. čtyřstěn

!!! **Zpětná rekonstrukce**

Pomocí zpětné rekonstrukce zobrazíme trojrozměrné těleso z jeho sdružených průmětů.



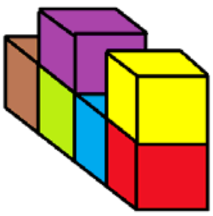
Povšimněte si, že objektu zobrazenému v Mongeově promítání odpovídá hned několik objektů ve volném rovnoběžném promítání (na obrázku jsou uvedeny pouze dva). Je zde jasně patrné, proč není Mongeovo promítání dosti názorné. Abychom měli ucelenou představu o daném tělese je nutné nárys a půdorys doplnit ještě o bokorys.

Mongeovo promítání na základní škole.

Pro žáky základních škol je důležité manipulovat s předměty a pracovat s barvami. Mongeovo promítání je jedna ze zobrazovacích metod, kde se dá využít hry. Uveďme příklad.

Názorná ukázka

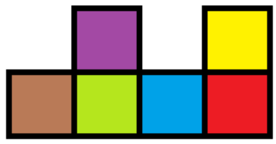
Na stole leží několik barevných kostiček. Postavte z nich libovolné (krychlové) těleso a nakreslete, jak vypadá ze všech stran.



zadané těleso

pohled zepředu

pohled shora



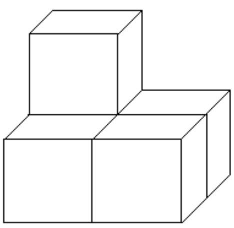
pohled z boku

4.1.3 Zobrazené krychlových těles pomocí „kótování“ (Perný, 2009)

Další ze způsobů, jak zobrazovat tělesa je „kótováním“. Tato možnost se zpravidla využívá pouze u krychlových těles, tedy u těles složených z krychlí. Jedná se o půdorys, nárys nebo bokorys doplněný čísly. Tato čísla symbolizují, v kolika vrstvách, řadách jsou krychle umístěny. Demonstrujme na jednoduchém příkladě.

!!!

Zadané těleso.



Zobrazení kótováním (nárys)

2	
1, 2	1, 2

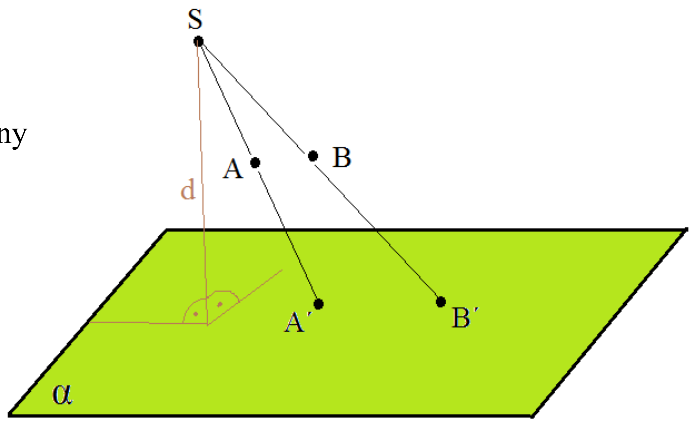
Zobrazení kótováním (půdorys)

1, 2	1
1	1

4.2 Středové promítání

Jedná se o takové promítání z prostoru E_3 do prostoru E_2, kde promítací přímky procházejí jediným bodem. Tento bod nazýváme středem promítání.

Základní **pojmy** spojené se středovým promítáním:



S – střed promítání

d – vzdálenost středu promítání od průmětny (distance)

AA´, BB´ - promítací přímky

α – průmětna (rovina, do které se promítá)

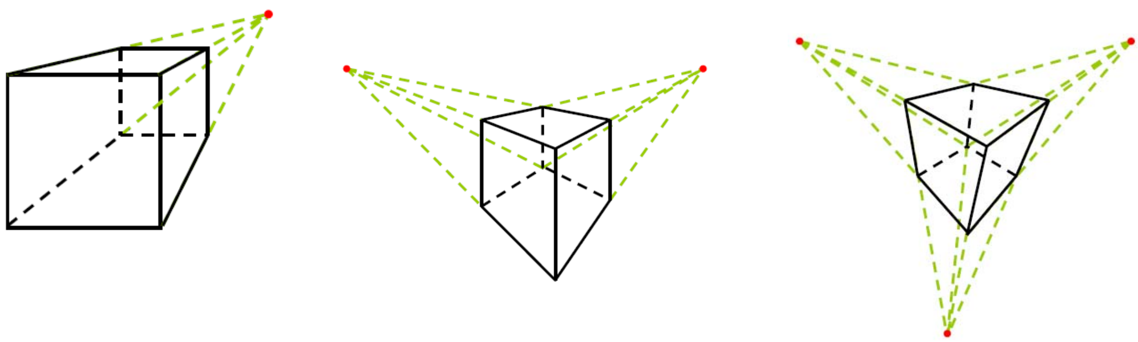
Základní vlastnosti:

- Všechny promítací přímky procházejí jediným bodem.
- Nezachovává rovnoběžnost.
  - Průměty přímek, rovnoběžných v trojrozměrném prostoru, jsou obecně různoběžné. Výjimkou jsou pouze ty přímky, které v prostoru leží v rovině rovnoběžné s průmětnou – zde se rovnoběžnost zachová.
- Vzdálenost objektů od středu promítání ovlivňuje velikost jejich průmětů.
  - Čím je těleso dále od středu promítání, tím bude menší.
- Středové (perspektivní) promítání vytváří obrazy podobné těm, které vidí lidské oko.

Zvláštním případem středového promítání je **perspektivní promítání**, jelikož v něm se nepromítají všechny body z E_3, ale pouze ty, které jsou v „zorném prostorovém úhlu“.

Perspektivní promítání lze rozdělit podle počtu středů promítání následovně [5]:

Jednobodová perspektiva Dvoubodová perspektiva Tříbodová perspektiva



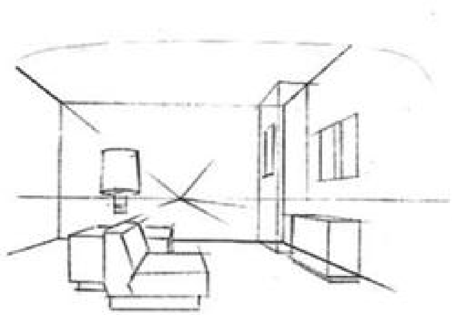
Nejčastěji používaná bývá **jednobodová** perspektiva, a tak si nyní popíšeme její konstrukci.

Postup při zobrazování jednobodové perspektivy:

- Objekt položíme tak, aby přední stěna byla v průčelné poloze.
- Tato přední stěna se zakreslí ve skutečné velikosti.
- **přímky kolmé na průmětnu** se zobrazí na přímky protínající se v jednom bodě – **středu promítání.**

- U přímek rovnoběžných s průmětnou se zachovává rovnoběžnost.

Perspektiva v praxi [5].



Jednobodový perspektiva [5]

Dvoubodová perspektiva [6]

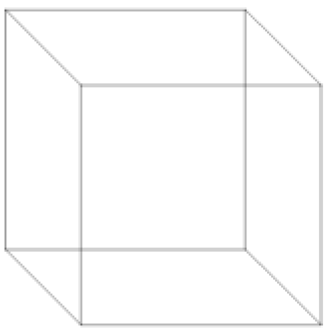
Řešená úloha

!!!

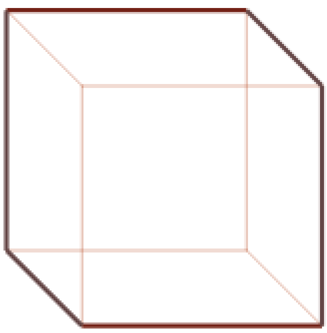
Úloha 1

Zobrazte krychli v nadhledu zleva.

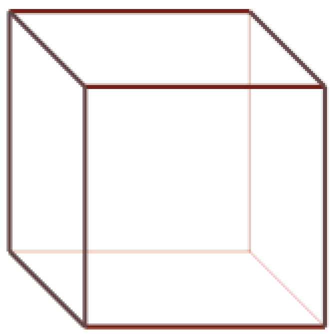
Poznámka: Podle názvu (nadhled zleva) je patrné, že viditelná bude levá boční stěna a pravá horní stěna. Udělejme si tedy jakýsi nákres tenkou čarou (Obrázek A). V druhém kroku zvýrazníme obvodové hrany (obrázek B). V posledním kroku pak podle názvu (nadhled zleva) zvýrazníme poslední viditelné hrany (obrázek C).



Obrázek A



Obrázek B



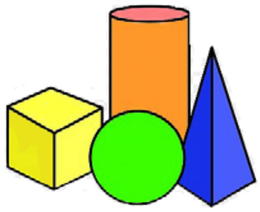
Obrázek C

3.2.1 Úlohy k procvičení

!!!

1. V Mongeově promítání sestrojte nárysy tří různých těles k danému půdorysu.

2. Zakreslete daná tělesa v Mongeově promítání.



3. Narýsujte průměty krychle a kvádru v nadhledu zleva, podhledu zprava a v podhledu zleva.

4. Určete všechny útvary, které mohou být rovnoběžnými průměty úsečky, polopřímky, přímky, trojúhelníka, konvexního úhlu, pravého úhlu, dvou přímek, tří přímek, čtverce a obdélníka.

5. Je dána krychle *ABCDEFGH* a body *K, L* tak, že bod *K* je mezi body *A, E* a bod *L* je střed hrany *HG*. Narýsujte průnik krychle a poloprostoru →*KLCD*.

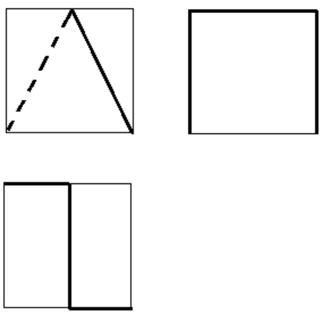
6. Je dán kvádr *ABCDEFGH* a bod *M* takový, že *G* je středem úsečky *MH*.
   a) Sestrojte průnik kvádru a roviny *BEM*.
   b) Sestrojte těleso *T*, které je průnikem kvádru a poloprostoru →*BEMD*

7. Mějme dáno krychlové těleso v půdorysu pomocí „kótování“. Zakreslete jej ve volném rovnoběžném promítání a v Mongeově promítání.

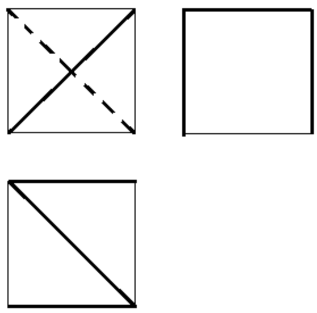
1, 2	1	1, 2
1	1, 2	

8. Mějme dánu krychli a na ní drát. Tato krychle je zobrazena pomocí nárysu, půdorysu a bokorysu. Zakreslete ji pomocí volného rovnoběžného promítání.

a)

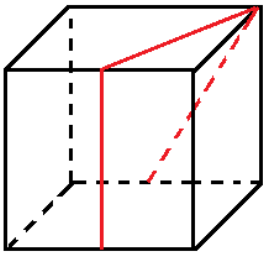


b)

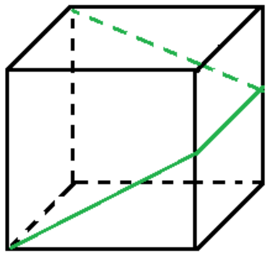


9. Mějme dány krychle a na nich namotaný provázet. Zakreslete nárys, půdorys a bokorys.

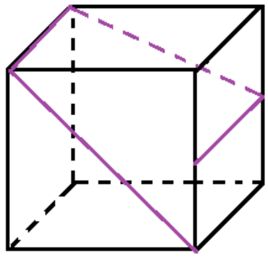
a)



b)



c)



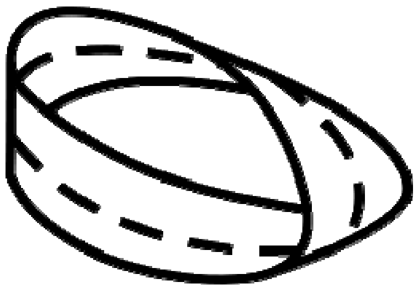
10) Popište, jaké jsou výhody a nevýhody Mongeova promítání.

5. Topologie

Topologie je oblast matematiky, která se zabývá velmi obecným výkladem pojmu prostor. Pracuje zejména s těmi vlastnostmi objektů, zachovávají vzdálenosti v tom smyslu, že blízké body se zobrazí na blízké body.

Z topologického hlediska nezáleží na vzdálenosti bodů, křivosti apod. Topologickým obrazem kružnice může být čtverec a obráceně.

Jedním z nejznámějších objektů, s kterými topologie pracuje je **Möbiova páska** zobrazená na obrázku.



Tato páska má pouze jednu hranu a jednu stěnu.

Její vyrobení z kousku papíru není náročné a lze jej demonstrovat i na prvním stupni základní školy.

[7]

5.1 Topologické pojmy

Okolí bodu

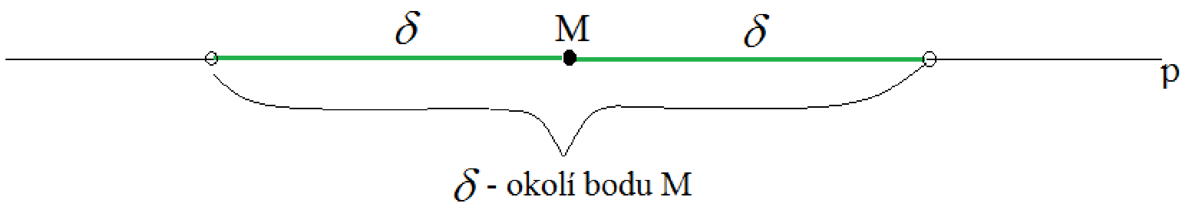
Okolí bodu M v prostoru E_n je $\{X \in E_n; |MX| < \delta\}$. Písmeno δ označuje libovolné kladné číslo. Okolí tedy obsahuje všechny body prostoru E_n, jejíž vzdálenost od bodu M je menší, než zvolené číslo δ.

Budeme-li hovořit o jednom konkrétním okolí, které bude zadané pomocí δ, budeme toto okolí nazývat δ-okolí (čti delta okolí).

Pojem **δ-okolí bodu** lze použít na libovolný **prostor**. Ukažme to na příkladě pro prostory E_1, E_2 a E_3.

Definice δ-okolí v prostoru E_1

δ-okolí v prostoru E_1 je $\{X \in E_1; |MX| < \delta\}$.

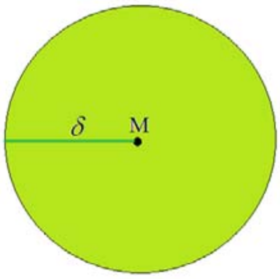


V definici δ - okolí je uvedeno, že $|MX| < \delta$, a tedy hraniční body nejsou součástí objektu. Platí, že δ -okolím bodu M v prostoru E_1 je úsečka délky $\delta + \delta = 2.\ \delta$ bez jejích hraničních bodů.

Definice δ -okolí v prostoru E_2

δ -okolí v prostoru E_2 je $\{X \in E_2; |MX| < \delta\}$.

Stejně jako v případě δ -okolí v prostoru E_1, i zde je uvedeno, že $MX < \delta$. Nyní se nepohybujeme na přímce, ale v rovině. Tímto okolím se tak stává vnitřek kruhu (kruh bez hraniční kružnice) s poloměrem δ.

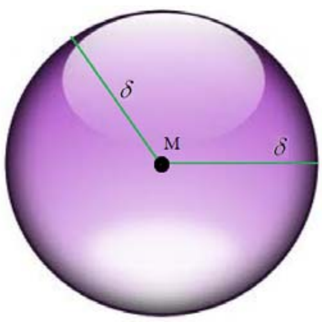


Toto δ -okolí si lze představit také jako plochu, kterou vypase ovečka, která je lanem délky δ připoutána ke kolíku zaraženého do bodu M. Nesmíme samozřejmě uvažovat hraniční kružnici.

Definice δ -okolí v prostoru E_3

δ -okolí v prostoru E_3 je $\{X \in E_3; |MX| < \delta\}$.

Pro prostor E_3 platí stejná pravidla jako pro prostory E_1 a E_2. V tomto případě bude delta okolím bodu M koule se středem v bodě M bez kulové plochy neboli vnitřek koule.



δ -okolí v prostoru E_3 si lze představit jako prostor, v kterém se může pohybovat rybička, je li uzavřená ve skleněném akváriu tvaru koule o poloměru δ.

Nadále se zaměříme na přesné definování pojmů, se kterými intuitivně pracujeme. Tyto pojmy je možné definovat až ve chvíli, kdy je nadefinované delta okolí bodu.

Definice (ohraničená množina) (Bělík, 2005)

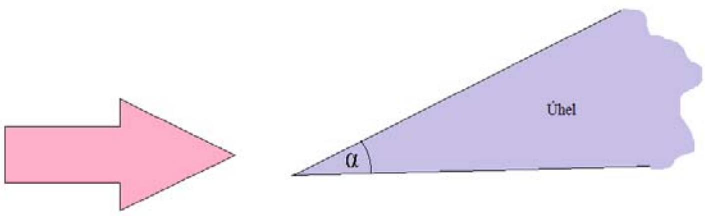
Množina M se nazývá ohraničená právě tehdy, když leží v okolí nějakého bodu $Y \in E_n$.

S pojmem ohraničená množina také úzce souvisí pojem ohraničený (omezený) útvar.

Definice (omezený útvar) (Bělík, 2005)

Útvar $\boldsymbol{U}$ se nazývá ohraničený právě tehdy, když existuje alespoň jeden bod $\boldsymbol{A}$ a jeho δ-okolí, pro které platí $U \subseteq \delta(A)$.

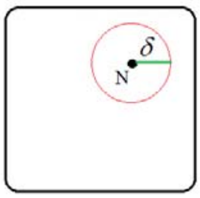
Rozhodněte, který z následujících dvou útvarů je omezený. Své tvrzení zdůvodněte.



Pojmy jako jsou vnitřní bod, vnější bod, hraniční bod je možné definovat pomocí množinové terminologie tak, jako předcházející definice. V tomto případě se pro lepší názornost omezíme na konkrétní útvary.

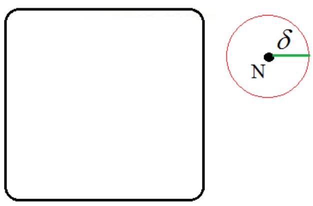
Definice (vnitřní bod útvaru) (Bělík, 2005)

Vnitřní bod útvaru $\boldsymbol{U}$ je takový bod, pro který existuje alespoň jedno δ-okolí takové, že toto okolí je také součástí útvaru $\boldsymbol{U}$. Nazveme-li tento bod například $\boldsymbol{N}$, musí platit $\delta(N) \subseteq U$.



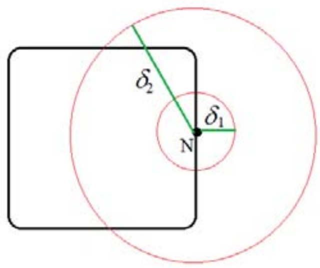
Definice (vnější bod útvaru) (Bělík, 2005)

Vnější bod útvaru $\boldsymbol{U}$ je takový bod, pro který existuje alespoň jedno δ-okolí takové, že toto okolí má prázdný průnik s útvarem $\boldsymbol{U}$. Nazveme-li tento bod například $\boldsymbol{N}$, musí platit $\delta(N) \cap U = \{\ \}$.



Definice (hraniční bod útvaru) (Bělík, 2005)

Hraniční bod útvaru ***U*** je takový bod, kdy pro každé δ-okolí tohoto bodu platí, že obsahuje alespoň jeden bod, který je součástí útvaru ***U*** a alespoň jeden bod, který není součástí útvaru ***U.***

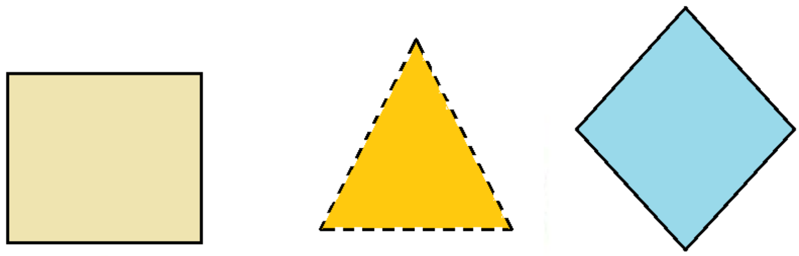


S pojmem hraniční bod útvaru souvisí pojem hranice útvaru, otevřený a uzavřený útvar. Hranice útvaru je množina všech jeho hraničních bodů.

Útvar ***U*** je **uzavřený** právě tehdy, když mu náleží všechny jeho hraniční body.

Útvar ***U*** je **otevřený** právě tehdy, když mu nenáleží žádný z jeho hraničních bodů.

Rozhodněte, který z následujících útvarů je otevřený, který uzavřený.



5.2 Topologické zobrazení

Definice topologického zobrazení vychází z topologických prostorů, které jsou nadstavbou učiva zmiňovaného v těchto skriptech. Z tohoto důvodu zde nebudeme uvádět definici, ale spíše intuitivní představu.

Intuitivní představa topologického zobrazení

Topologické zobrazení je takové zobrazení, které dvěma různým velmi blízkým bodům opět přiřadí dva různé velmi blízké body. Platí tedy $\forall A, B;\ A \neq B \Rightarrow Z(A) \neq Z(B)$.

V tomto zobrazení se nemusí zachovávat délka, rovnoběžnost, tvar, velikost ani dělící poměr.

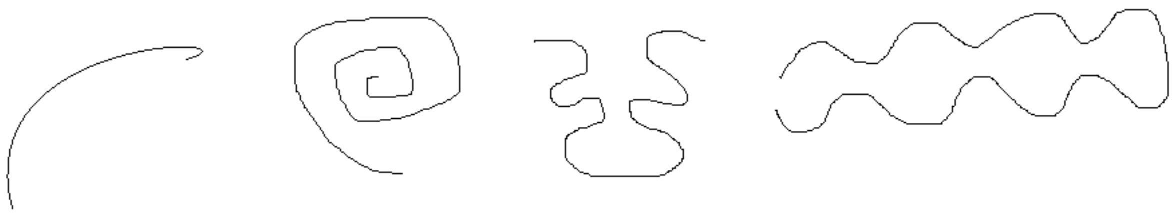
Topologické zobrazení si lze dobře představit pomocí provázku. Dva útvary si jsou navzájem topologickými obrazy za předpokladu, že jeden z nich vytvoříme z provázku a jsme schopni z něj získat druhý, aniž bychom provázek stříhali, spojovali nebo dělali uzlíky. Pokuste se na základě této představy vyřešit následující vzorovou úlohu.

!!! **Vzorová úloha:** Která písmenka si jsou topologickými obrazy?

M, N, O, D, R, T, W, X, K, L, I, U, P

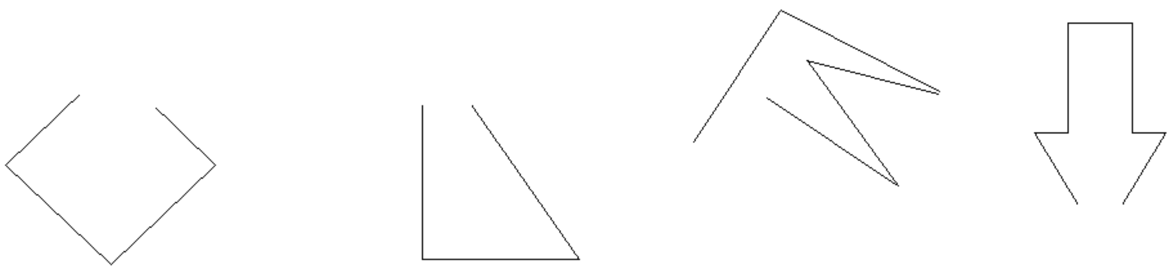
Topologickým obrazem úsečky může být jednoduchá křivka, jednoduchá čára, jednoduchá lomená čára. Topologickým obrazem kružnice pak může být jednoduchá uzavřená křivka a jednoduchá uzavřená lomená čára. Pokud u všech těchto pojmů vynecháme slovíčko jednoduchá, znamená to, že čáry nebo křivky mohou samy sebe protnout. Pomocí obrázku si vysvětlíme rozdíly mezi těmito pojmy.

Jednoduchá křivka

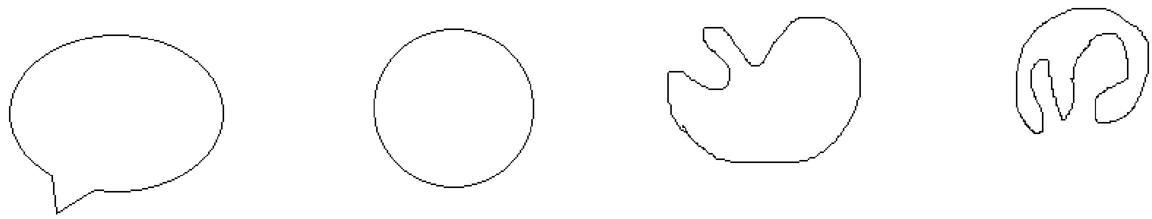


Jednoduchá čára

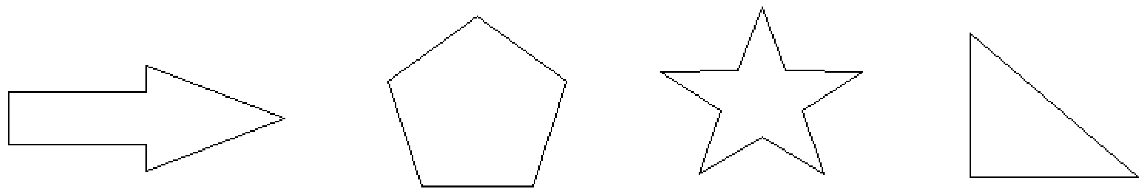
Jednoduchá lomená čára



Jednoduchá uzavřená křivka



Jednoduchá uzavřená lomená čára



Definice (konvexnost útvarů)

Útvar U je konvexní právě tehdy, když libovolné dva body tohoto útvaru lze spojit úsečkou takovou, že tato úsečka je celá součástí útvaru U.

Definice (souvislost útvarů)

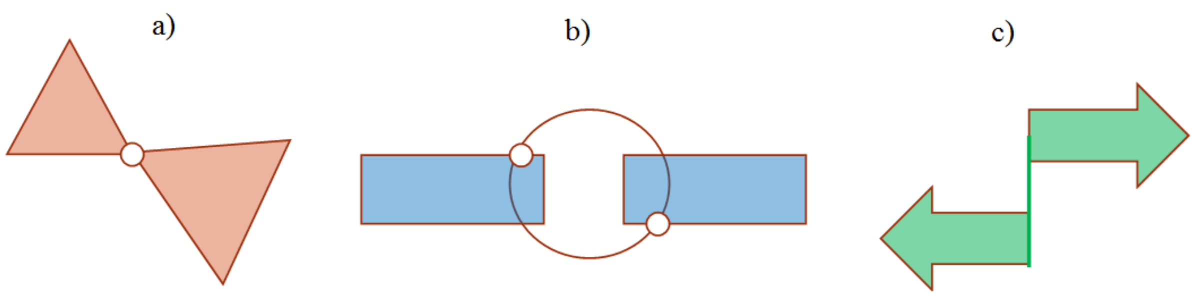
Útvar ***U*** je souvislý právě tehdy, když libovolné dva body tohoto útvaru lze spojit jednoduchou křivkou takovou, že tato křivka bude také součástí útvaru ***U***.

Souvislý útvar si lze představit také tak, že jsme schopni se dostat jedním tahem z libovolného jeho bodu do jiného jeho libovolného bodu, aniž bychom tento útvar opustili.

!!!

Ukázka

Určete, který z následujících útvarů je souvislý.



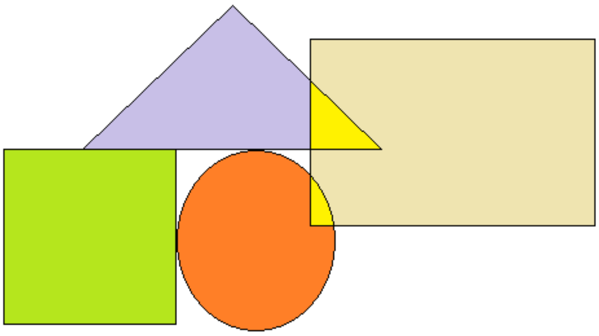
Řešení A) Ne B) Ne C) Ano

Definice (překrývající se útvary)

Dva útvary se překrývají právě tehdy, když jejich průnik obsahuje alespoň jeden bod, který je vnitřním bodem obou těchto útvarů.

Ukázka

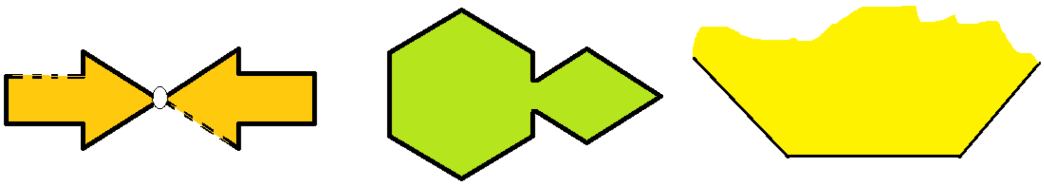
Určete, které dva z útvarů se překrývají.



Řešení: Překrývají se pouze trojúhelník s obdélníkem a kruh s obdélníkem.

5.2.1 Úlohy k procvičení (Bělík, 2005)

1. Určete, které z následujících útvarů jsou konvexní, souvislé, otevřené, uzavřené, omezené a neomezené.



2. Mějme dány nekolineární body *P, Q, R*. Zakreslete útvar *U*, který je dán následovně: $U=\{X\in E_2;PX\cap RQ\neq\{\ \}\}\cup\{X\in E_2;RX\cap PQ\neq\{\ \}\}$. U tohoto útvaru určete, zda je konvexní, souvislý, otevřený, uzavřený, omezený a neomezený.
3. Mějme dány nekolineární body *M, N, P*. Útvary *U* a *V* jsou zadány následovně: Útvar *U* je množinový rozdíl konvexního úhlu *MPN* a trojúhelníka *MPB*. Útvar V je polorovina →*PNM*. U tohoto útvaru určete, zda je konvexní, souvislý, otevřený, uzavřený, omezený a neomezený.
4. Zakreslete útvar, který je:

   a) otevřený, omezený, souvislý, nekonvexní

   b) uzavřený, neomezený, nesouvislý, nekonvexní

   c) otevřený, konvexní, souvislý, omezený

   d) neotevřený, neuzavřený, omezený, souvislý, nekonvexní

5. Mějme dán útvar, který vznikl **sjednocením** dvou jiných útvarů, které byly vybrány z množiny útvarů (čtverec, rovinný pás, polorovina, úhel, kruh a trojúhelník). Zakreslete všechny možnosti tak, aby výsledný útvar byl:

   a) otevřený, omezený, souvislý, nekonvexní

   b) uzavřený, neomezený, nesouvislý, nekonvexní

   c) otevřený, konvexní, souvislý, omezený

   d) neotevřený, neuzavřený, omezený, souvislý, nekonvexní

6. Mějme dán útvar, který vznikl **průnikem** dvou jiných útvarů, které byly vybrány z množiny útvarů (čtverec, rovinný pás, polorovina, úhel, kruh a trojúhelník). Zakreslete všechny možnosti tak, aby výsledný útvar byl:

   a) otevřený, omezený, souvislý, nekonvexní

   b) uzavřený, neomezený, nesouvislý, nekonvexní

   c) otevřený, konvexní, souvislý, omezený

   d) neotevřený, neuzavřený, omezený, souvislý, nekonvexní

6. Míra geometrických útvarů

„Mezi matematické pojmy, které se vyvinuly z potřeb praxe lidí ve společnosti, nutno bezesporu zařadit např. pojmy úsečka a její délka, geometrický útvar a jeho obsah, těleso a jeho objem. Podnětem pro studium těchto pojmů byly otázky, které vznikaly např. při vyměřování a zavodňování pozemků, při plánování staveb a cest, při směně atp. Sám termín geometrie (gé = země, metrein = měřit) poukazuje dostatečně výmluvně na souvislost této disciplíny s praktickou činností lidí. Dnes sice existují celá odvětví geometrie, kde se „obejdeme bez čísel“, ale přesto je otázka zavedené velikosti geometrických útvarů prakticky i teoreticky důležitá.“ (Kouřim, 1985).

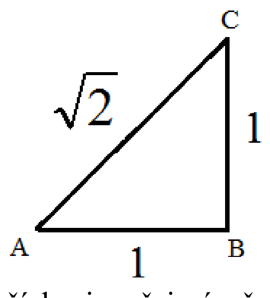
První míry se odvozovaly od rozměrů částí lidského těla, např. loket, píď (vzdálenost konce malíčku a palce napjatých prstů dospělého člověka), sáh apod.

Další míry byly odvozovány od plodů a zrn z dané oblasti. Všechny tyto jednotky nám udávají určité míry, v kterých měříme.

Upustíme-li od jednotek měření, dostaneme se k závěru, že změřením úsečky dostaneme určité číslo. Zjišťujeme tak, že měření je přiřazování čísel úsečkám, a tedy zobrazení.

Zamysleme se, jaká tato čísla musí být?

Přirozená?	To jistě ne, jelikož mohou být úsečky délky 2,5.
Celá?	To také neplatí z důvodu, který je uveden u přirozených čísel. Navíc nelze narýsovat úsečku záporné délky.
Racionální?	Zde si uvedeme příklad. Mějme dán rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena mají délku 1. Jak je dlouhá přepona?



Využitím Pythagorovy věty získáme:

$b^2 = a^2 + c^2 = 1 + 1 = 2$

$b = \sqrt{2}$

Jelikož jsme našli úsečky, jejichž délka je iracionální číslo je zřejmé, že čísla, která přiřazujeme úsečkám jsou čísla REÁLNÁ.

***Didaktická poznámka**: trojúhelník na obrázku není uveden ve standardní podobě, kdy vrchol C je u pravého úhlu, jelikož častým opakováním jediného vzoru dochází k tomu, že žáci tvrdí, že Pythagorova věta je $c^2 = a^2 + b^2$.*

6.1 Míra úseček (Bělík, 2005)

V případě míry úseček je nutné pracovat s tzv. grafickým součtem úseček.

Definice (grafický součet úseček) – lze zavést také pomocí algoritmu

1. Nechť jsou dány úsečky *AB* a *CD*.
2. Zvolme polopřímku →*PQ*.
3. Nanesme úsečku *AB* na polopřímku →*PQ*. Nově vzniklou úsečku označme *PK*.
4. Nanesme úsečku *CD* na polopřímku ←*KP*. Nově vzniklou úsečku označme *KL*.
5. Úsečka *PL* je grafickým součtem úseče *AB* a *CD*.

Definice:

Míra úseček je zobrazení množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel. Číslo přiřazené úsečce AB v tomto zobrazení se nazývá délka úsečky a značíme jej |*AB*|. Musí nadále platit:

1. $\exists AB; |AB| = 1$
2. $(\forall AB, CD); |AB \cong CD| \Rightarrow |AB| = |CD|$
3. $(\forall AB, CD); |AB + CD| = |AB| + |CD|$

Demonstrujme měření úseček na úloze, při jejímž řešení budeme značně detailní.

Úloha 1.

Mějme dány úsečky *MN* a *OP*. Určete velikost úsečky *OP*, jestliže |*MN*| = 1 (povšimněte si, že neudáváme jednotku).

Poznámka: Řešení této úlohy je pro žáka základní školy snadné. Pouze ji zadáme tak, že žák bude dotázán, kolikrát je úsečka OP delší, jak úsečka MN? Nanášením žák rychle a spolehlivě najde řešení.

Při hledání řešení se musíme držet tří pravidel zmíněných v definici. **První** předpoklad o existenci úsečky délky jedna je jistě splněn již ze zadání. Můžeme tedy pokračovat přednášením úsečky *MN* na polopřímku →*OP*. Tímto přenesením získáme bod P_1.

Využitím **druhého** předpokladu získáme:

$MN \cong OP_1 \Rightarrow |MN| = |OP_1| \Rightarrow |OP_1| = 1$

Postup opakujeme a opět naneseme úsečky *MN* na polopřímku →*OP*, ovšem nyní do bodu P_1.

Získáme:

$MN \cong P_1P_2 \Rightarrow |MN| = |P_1P_2| \Rightarrow |P_1P_2| = 1$

Nyní je možné zjistit, jak je dlouhá úsečka OP_2. Toto zjistíme využitím **třetího** předpokladu následovně:

$|OP_2| = |OP_1 + P_1P_2| = |OP_1| + |P_1P_2| = 1 + 1 = 2$

Další kroky jsou již intuitivní. Opět naneseme úsečku *MN* na polopřímku → OP_1, nyní do bodu P_2. Zjistíme, že bod P_3 je totožný s bodem *P*.

Pro vyřešení úlohy nyní stačí opět použít druhý a třetí předpoklad.

$MN \cong P_2P_3 \Rightarrow |MN| = |P_2P_3| \Rightarrow |P_2P_3| = 1$

$|OP| = |OP_2 + P_2P_3| = |OP_2| + |P_2P_3| = 2 + 1 = 3$

Těmito kroky jsme ověřili, že délka úsečky *OP* je trojnásobkem délky úsečky *MN*. Platí tedy, že |*OP*| = 3.

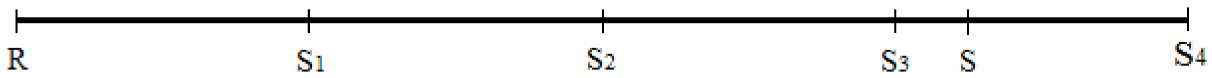
Poznámka: Jak již bylo řečeno, zjistit, kolikrát je jedna úsečka delší než druhá, není pro žáka základní školy náročné za předpokladu, že se jedná o celočíselný násobek. Z tohoto důvodu je vhodné také prezentovat úlohy, kdy tomu tak být nemusí, a žák musí velikost úsečky „odhadnout“.

!!! **Úloha 2.**

Mějme dány úsečky *KL* a *RS*. Určete velikost úsečky *RS*, jestliže |*MN*| = 1.

První kroky budou stejné, jako v případě úlohy jedna. Rozdíl nastane ve chvíli, kdy se při nanášení přiblížíme k vrcholu *S*.

Nyní je zřejmé, že velikost úsečky *RS* není celočíselným násobkem úsečky *KL*. Je tak nutné zjistit hranice, které nám pomohou odhadnout, jak je úsečka *RS* dlouhá. Tohoto docílíme opětovným nanesením úsečky *KL* na polopřímku →*RS* od bodu S_3.

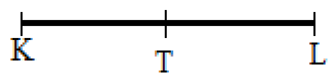


Nyní lze zapsat $|RS_3| < |RS| < |RS_4|$ a tedy platí $3 < |RS| < 4$. Velikost úsečky RS je tak mezi třemi a čtyřmi, můžeme tedy psát |RS| = 3,5 +- 0,5.
Číslu **0,5** říkáme **absolutní nepřesnost** a číslu **3,5 střední aproximace nepřesnosti**.

Poznámka: Kdybychom při měření vycházeli z absolutní nerovnosti, nemusíme vždy získat vypovídající údaj. Připusťme, že jednotkou budou centimetry. Spleteme-li se o 0,5 cm při měření fotbalového hřiště, zřejmě se nic neděje. Dojde-li však k této chybě u obalu na mobil, který je značně menší, bude tato chyba nežádoucí. Z tohoto důvodu se více využívá tzv. relativní nepřesnosti.

Platí, že **relativní nepřesnost** je poměr mezi absolutní nepřesností a střední aproximací nepřesnosti. Výsledná hodnota je vyjádřená v procentech a značíme ji R_n.

$R_n = \frac{0{,}5}{3{,}5} = 0{,}142 = 14{,}2\%$ získaná hodnota je přibližná. Tato nepřesnost je poměrně značná. Z tohoto důvodu se provádí tzv. zpřesnění, kterého docílíme rozpůlením jednotkové úsečky.

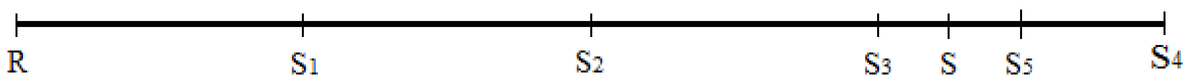


Musíme ověřit, že vrchol *T* je ve středu mezi body *KL*. Předpokládáme tedy, že $|KT| = 0{,}5$.
Nyní opět aplikujme známé předpoklady.

$$KT \cong TL \Rightarrow |KT| = |TL| \Rightarrow |TL| = 0{,}5$$

$$|KL| = |KT + TL| = |KT| + |TL| = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$$

Naneseme úsečku *KT* na polopřímku →*RS* do bodu S_3, získáme bod S_5.



Jistě platí:

$KT \cong S_3S_5 \Rightarrow |KT| = |S_3S_5| \Rightarrow |S_3S_5| = 0{,}5$

$|RS_5| = |RS_3 + S_3S_5| = |RS_3| + |S_3S_5| = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$

Následně opět vyjádříme absolutní a relativní nepřesnost:

$|RS_3| < |RS| < |RS_5|$

|RS| = 3,25 +- 0,25

$R_n = \dfrac{0{,}25}{3{,}25} = 0{,}0769 = 7{,}69\%$ Čím více kroků zpřesňování provedeme, tím menší bude relativní nepřesnost a tím větší bude relativní přesnost.

Poznámka: Podobných úvah využívají žáci již na prvním stupni. Sami si jistě uvědomují, že měřit v milimetrech je přesnější než v centimetrech apod.

Budeme-li měřit délku úsečky tímto způsobem, mohou nastat **tři možnosti**:

1. Krajní bod úsečky, na kterou nanášíme (úsečka *RS*) splyne s některým z bodů $S_1, S_2, \dots, S_n$ dříve, než dojde k zpřesnění.
2. Krajní bod úsečky, na kterou nanášíme (úsečka *RS*) splyne s některým z bodů $S_1, S_2, \dots, S_n$ v některém kroku zpřesňování. Pak lze jednoduše zapsat $(\exists n \in N) S_n = S$.
3. Krajní bod úsečky, na kterou nanášíme (úsečka *RS*) nikdy nesplyne s žádným bodem $S_1, S_2, \dots, S_n$ bez ohledu na skutečnost, kolik zpřesnění provedeme. $(\forall n \in N) S_n \neq S$.

   Budeme-li tato zpřesnění provádět dostatečně dlouho, budeme se limitně přibližovat hledanému reálnému číslu.

6.2 Míra obrazců (Bělík, 2005)

Definice

Míra obrazců je zobrazení množiny všech rovinných obrazců na množinu všech nezáporných reálných čísel. Číslo přiřazené obrazci *O* v tomto zobrazení se nazývá obsah obrazce a značíme jej *S(O)*. Musí nadále platit:

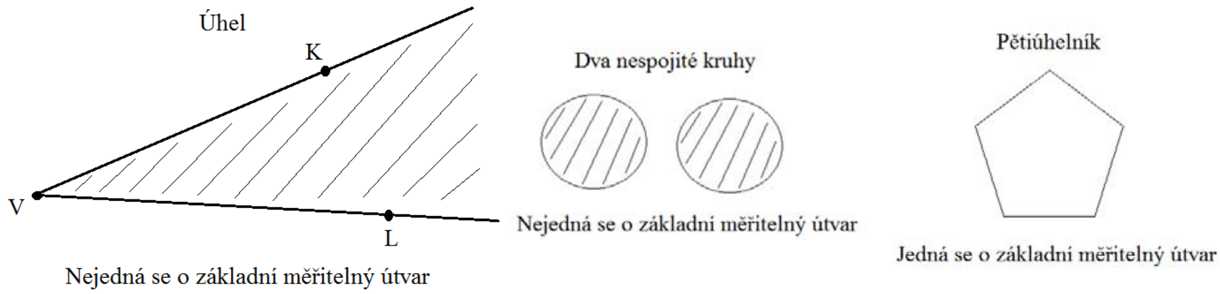
1. $\exists O; S(O) = 1$
2. $(\forall O_1, O_2); O_1 \cong O_2 \Rightarrow S(O_1) = S(O_2)$
3. $(\forall O_1, O_2)\ S(O_1 \cup O_2) = S(O_1) + S(O_2).$ *Zde musí platit, že se obrazce nepřepřekrývají.*

Poznámka: Zdůvodněme, proč by třetí pravidlo neplatilo, kdyby se obrazce překrývaly. Představme si dva čtverce o obsahu 2 cm^2. Pokud jsou totožné (překrývají se celé), pak je jejich sjednocení opět 2 cm^2. Pokud leží vedle sebe, je jejich sjednocení 4 cm^2.

Zmiňme několik základních pojmů, se kterými budeme pracovat:

Základní měřitelný útvar: jedná se o rovinný útvar, který je omezený, spojitý a jehož hranici tvoří jednoduchá uzavřená křivka.

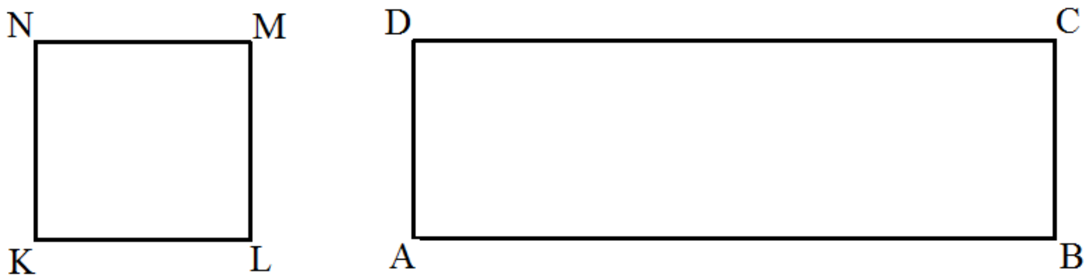
Měřitelný útvar: jedná se o útvar, který je složitelný ze základních měřitelných útvarů.



Demonstrujme měření obrazce na konkrétní úloze.

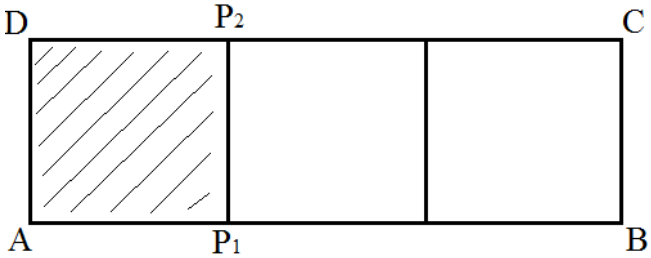
Úloha

!!! Mějme dán jednotkový čtverec (čtverec o obsahu jedna) *KLMN* a obdélník *ABCD*. Zdůvodněte, jaký obsah má obdélník *ABCD*?



Poznámka: Řešení této úlohy je pro žáka základní školy snadné. Pouze opakovaně nanáší čtverec KLMN na obdélník ABCD.

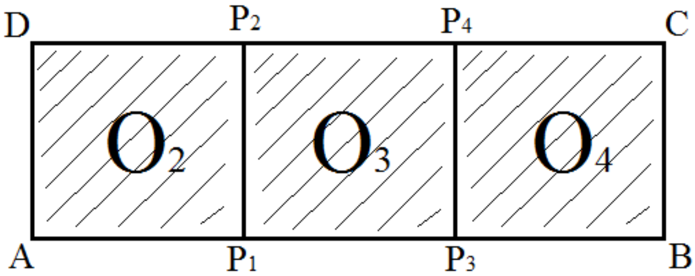
Při hledání řešení se musíme držet tří pravidel zmíněných v definici. První předpoklad o existenci jednotkového čtverce je splněn již ze zadání. Můžeme tedy pokračovat přednášením čtverce *KLMN* na obdélník *ABCD*. Tímto přenesením získáme body P_1 a P_2.



Jistě platí:

Čtverec *KLMN* je shodný se čtvercem AP_1P_2D, a tedy mají podle druhého předpokladu z definice shodné obsahy. Obsah čtverce AP_1P_2D je tak nutně roven jedné.

Celý postup několikrát opakujeme.



Nyní opět aplikujeme předpoklady z definice.

Čtverec *KLMN* je shodný se čtvercem $P_1P_3P_4P_2$ a tedy mají podle druhého předpokladu z definice shodné obsahy. Obsah čtverce $P_1P_3P_4P_2$ je pak také nutně roven jedné.

Obdélník AP_3P_4D je sjednocením čtverců AP_1P_2D a $P_1P_3P_4P_2$, které se nepřekrývají. Platí tak, že jeho obsah je součtem obsahů těchto čtverců.

Nyní opět naneseme čtverec *KLMN* a získáme čtverec P_3BCP_4, který bude mít podle druhého předpokladu stejný obsah. V posledním kroku jej podle třetího předpokladu sečteme s obdélníkem AP_3P_4D a získáme obsah obdélníka *ABCD*.

Pokud bychom jednotkový čtverec označili O_1 (jako obrazec 1) a všechny čtverce, které vnikly jeho nanesením na obdélník *ABCD* jako O_2, O_3 a O_4, jak je uvedeno v obrázku výše, bylo by možné celý postup zapsat následovně:

$$O_1 \cong O_2 \Rightarrow S(O_1) = S(O_2) \Rightarrow S(O_2) = 1$$

$$O_1 \cong O_3 \Rightarrow S(O_1) = S(O_3) \Rightarrow S(O_3) = 1$$

$$O_{2,3} = S(O_2 \cup O_3) = S(O_2) + S(O_3) = 1 + 1 = 2$$

$$O_1 \cong O_4 \Rightarrow S(O_1) = S(O_4) \Rightarrow S(O_4) = 1$$

$$O_{2,3,4} = S(O_{2,3} \cup O_4) = S(O_{2,3}) + S(O_4) = 2 + 1 = 3$$

Poznámka: Stejně, jako v případě míry úseček, ani zde neplatí, že jeden obrazec musí být celočíselným násobkem druhého. Pokud by tak nebylo, provedli bychom „zpřesnění" rozčtvrcením jednotkového čtverce a pokračovali bychom obdobně, jako v kapitole 6.1.

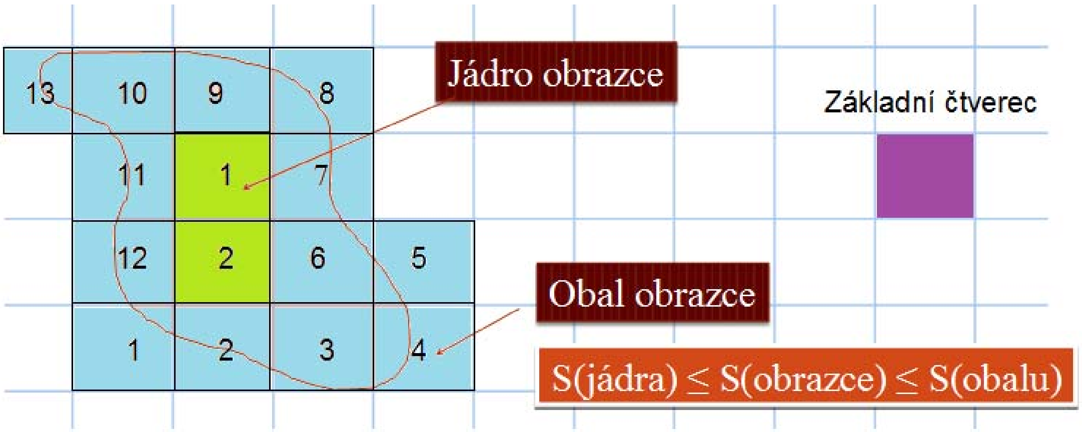
Problematiku měření obsahu a pokrývání jednotkovým čtvercem je možné řešit také v případě náročnějších útvarů, jejichž tvary jsou oblé. V tomto případě je vhodné využití čtvercové sítě. Obvykle platí, že za jednotkový čtverec je volen nejmenší čtverec sítě. Zmiňme několik základních pojmů, s kterými budeme následně pracovat.

Jádro obrazce – množina jednotkových čtverců v dané čtvercové síti, které jsou podmnožinou obrazce.

Obal obrazce – množina jednotkových čtverců v dané čtvercové síti, kde každý z nich obsahuje alespoň jeden vnitřní bod obrazce.

!!! Jádro je tedy podmnožinou obalu !!!

!!!



Poznámka: Na základě pokrývání obrazců čtverci si žáci uvědomují vazby mezi jednotlivými obrazci a snáze pak odvozují vzorce pro jejich obsahy apod.

Nerovnost z obrázku je snadno odvoditelná a určuje nám hranice, díky kterým lze odhadnout obsah daného obrazce. Lze tedy psát

$S_{(\text{jádra})} \leq S_{(\text{obrazce})} \leq S_{(\text{obalu})}$.

V našem případě:

$2 \leq S_{(\text{obrazce})} \leq 15$.

Platí tedy, že $S_{(\text{obrazce})} = 8{,}5$ +- 6,5. Opět lze spočítat relativní nepřesnost.

$R_n = \frac{6{,}5}{8{,}5} = 0{,}7647$ Zřejmě nechceme měřit s relativní nepřesností 76,47%. Z tohoto důvodu provedeme zjemnění sítě. Povšimněme si, že jednotkový čtverec má čtvrtinový obsah původního jednotkového čtverce.

Platí:

$$S_{(\text{jádra})} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

$$S_{(\text{obalu})} = \frac{17}{4} + \frac{31}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

$$S_{(\text{jádra})} \leq S(\text{obrazce}) \leq S(\text{obalu})$$

$$\frac{17}{4} =< S_{(\text{obrazce})} < \frac{48}{4}$$

$$S_{(\text{obrazce})} = \frac{65}{8} + -\frac{31}{8} = 8{,}125 + -3{,}875$$

$R_n = \dfrac{3{,}875}{8{,}125} = 0{,}477$ Naše měření je stále nepřesně, ovšem nyní měříme s relativní nepřesností 47,7%.

Kdybychom pokračovali zjemňováním sítě dále, mohly by nastat dvě možnosti:

1. Čtverce vzniklé zjemněním přesně splynou s měřeným obrazcem a po $n \in N$ zjemnění sítě získáme přesný obsah obrazce.
2. Čtverce vzniklé zjemněním nikdy přesně nesplynou s měřeným obrazcem. V tomto případě se k hledanému obsahu budeme pouze limitně blížit.

6.3 Míra těles

Definice

Míra těles je zobrazení množiny všech prostorových těles (E_3) na množinu všech nezáporných reálných čísel. Číslo přiřazené tělesu T v tomto zobrazení se nazývá objem tělesa a značíme jej *V(T)*. Musí nadále platit:

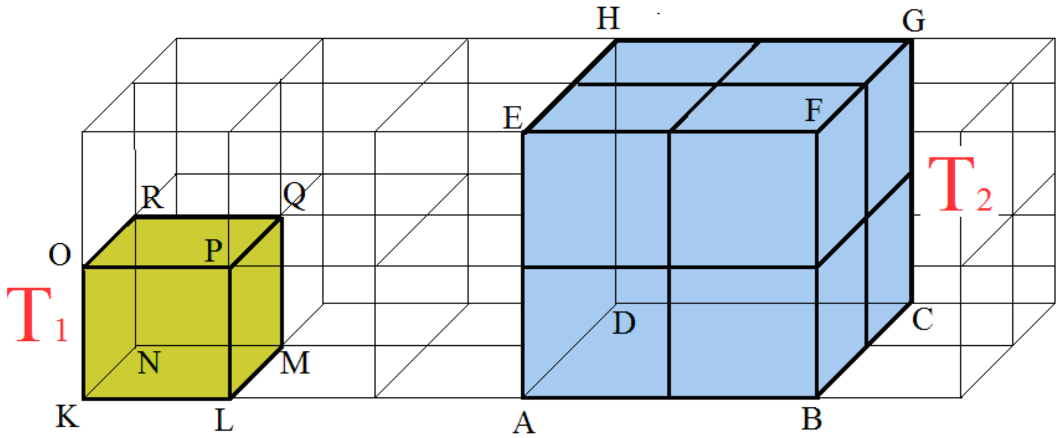
1. $\exists T; V(T) = 1$
2. $(\forall T_1, T_2); T_1 \cong T_2 \Rightarrow V(T_1) = V(T_2)$
3. $(\forall T_1, T_2)\ jestliže\ T_1 \cap T_2 = \{\}, pak\ V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Zatímco v případě míry obrazců bylo nutné vycházet z jednotkového čtverce a využívali jsme čtvercovou síť, v tomto případě budeme vycházet z jednotkové krychle a využívat budeme krychlovou síť. Na následující úloze budeme demonstrovat pouze ideální případ, kdy objem tělesa je celočíselným násobkem objemu jednotkové krychle (krychle o objemu jedna).

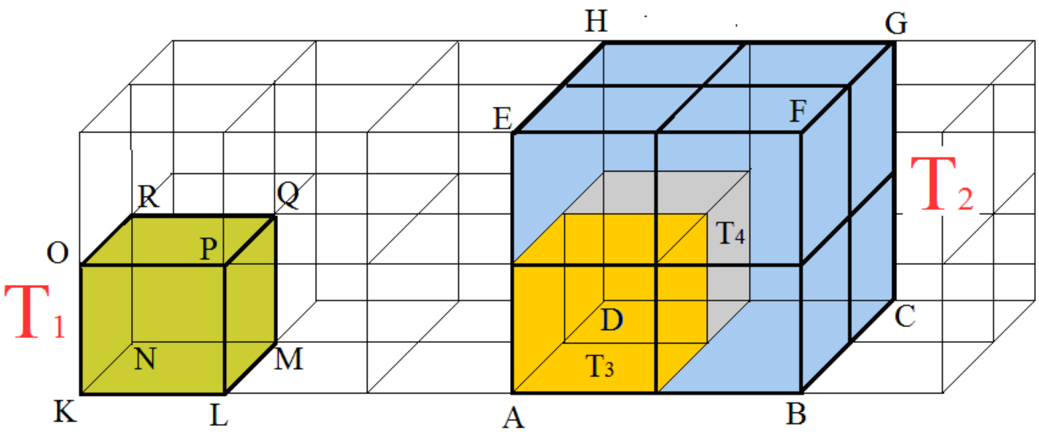
Úloha

Je dána jednotková krychle KLMNOPQR a krychle ABCDEFGH. Zdůvodněte, jaký objem má krychle ABCDEFGH?

Poznámka: Těleso, jehož objem zjišťujeme, nemusí být krychlové. Tato úloha je pouze ukázkový. Abychom nemuseli stále dokola vypisovat vrcholy krychlí, budeme je označovat zkratkou T_1 *(pro krychli KLMNOPQR) a* T_2 *(pro krychli ABCDEFGH).*



Postup měření objemu tělesa T_2 pomocí tělesa T_1 je obdobný, jako v případě míry úseček nebo míry obrazců. Nadále naznačíme pouze prvních několik kroků postupu.



První předpoklad z definice míry těles je jistě splněn, jelikož $V(T_1) = 1$.

$T_1 \cong T_3 \Rightarrow V(T_1) = V(T_3) \Rightarrow V(T_3) = 1$

$T_1 \cong T_4 \Rightarrow V(T_1) = V(T_4) \Rightarrow V(T_4) = 1$ atd.

$V(T_{3,4}) = V(T_3 + T_4) = V(T_3) + V(T_4) = 1 + 1 = 2$

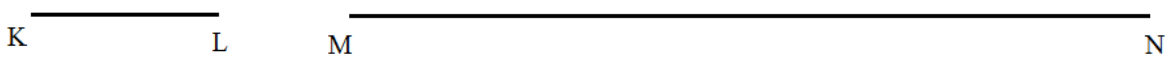
Je zřejmé, že $V(T_2) = 8 \cdot V(T_1)$. Opět může nastat, že objem tělesa T_2 nebude celočíselným násobkem objemu tělesa T_1. V tomto případě opět využíváme jádra tělesa a obalu tělesa. Platí:

Jádro (dolní mez) $\leq$ Objem tělesa $\leq$ Obal (horní mez)

Základní jednotkou objemu je jeden metr krychlový (1 m^3). Všechny ostatní jednotky jsou odvozené (mm^3, cm^3, km^3 aj.).

!!! 6.4 Úlohy k procvičení

1. Mějme dánu úsečku *KL*, jejíž délka je rovna jedné. Pomocí této úsečky změřte délku úsečky *MN*. Proveďte alespoň jedno zpřesnění.

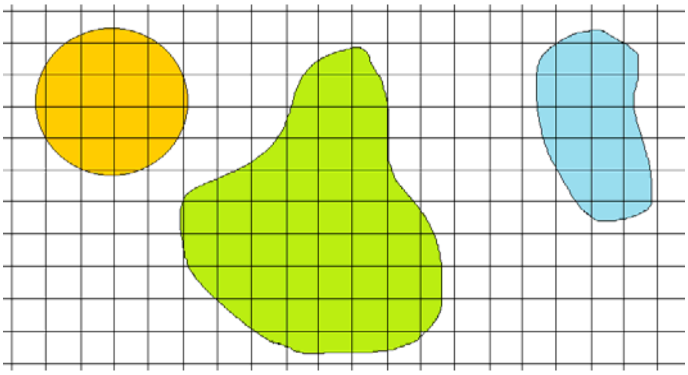


2. Pravoúhlý trojúhelník je zadán tak, že délky jeho odvěsen jsou v poměru 2:3. Položme délku kratší odvěsny rovnu jedné. Určete délku přepony tak, aby relativní nepřesnost byla menší než 5%.

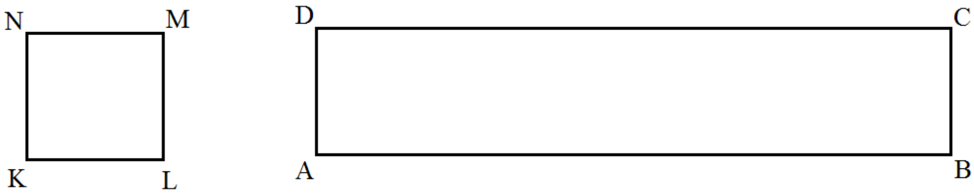
3. Jsou dány body $A = [1; 3]$, $B = [3; 4]$, $C = [1; 0]$ a $D = [6; 3]$. Určete $|CD|$, jestliže $|AB| = 1$. Výsledek zapište pomocí nerovností a proveďte alespoň jedno zpřesnění.

4. Mějme dán obdélník *KLMN*, kde $|KL| = 10$ cm a $|LM| = 15$ cm. Zjistěte velikost $|KM|$, jestliže $|KN| = 1$. Výsledek zapište pomocí nerovností a proveďte alespoň jedno zpřesnění.

5. Mějme dáno několik útvarů ve čtvercové síti. Určete obsah těchto útvarů pomocí jader a obalů. Výsledek zapište pomocí nerovností. Proveďte alespoň jedno zpřesnění pomocí zjemnění sítě.



6. Mějme dán čtverec KLMN, jehož obsah je roven jedné. Pomocí tohoto čtverce zjistěte obsah obdélníků ABCD. Výsledek zapište pomocí nerovností. Proveďte alespoň jedno zpřesnění. Při řešení vycházejte výhradně z rozměrů na obrázku.



7. Jak se změní objem a povrch kvádru ABCDEFGH, kde $|AB| = 3\ cm$, $|BC| = 4cm$ a $|BF| = 5cm$, jestliže všechny rozměry zdvojnásobíme? Řešte také obecně.

8. Mějme dány body A[1;3], B[4;6] a C[-2;3]. Zakreslete kružnici tak, aby protínala všechny tyto body.

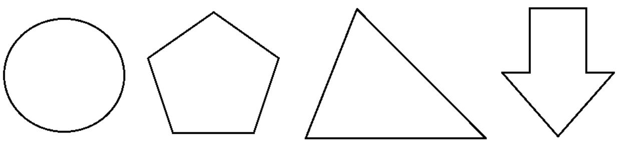
9. Mějme dánu krychli složenou z devíti krychliček. Jak se změní její povrch a objem, jestliže:

a) odebereme prostřední tři krychličky (vznikne tunel),

b) odebereme krychličky u vrcholů,

c) odebereme vždy pouze tu krychličku, která je ve středu každé stěny.

10. Mějme dány rovinné útvary. Rozdělte tyto útvary na dvě části tak, aby tyto části měly stejný obsah.



7. Závěrečné procvičení

7.1 Vzorový zápočtový test

Zápočtový test

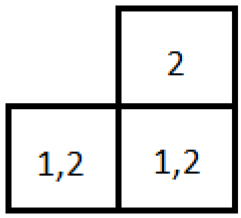
Geometrie s didaktikou II – letní semestr

Na sepsání testu je 120 minut. Pro jeho splnění je nutné dosáhnout minimálně 70%.

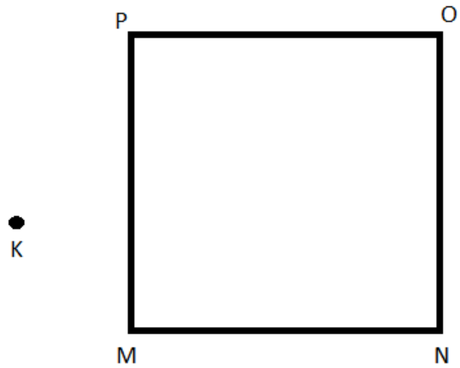
---

1) Nadefinujte a vhodně zakreslete vnější bod útvaru, vnitřní bod útvaru a hraniční bod útvaru.

2) Mějme dáno krychlové těleso zadané pomocí kótování (nárys). Zobrazte (narýsujte) jej ve volném rovnoběžném promítání a v Mongeově promítání.



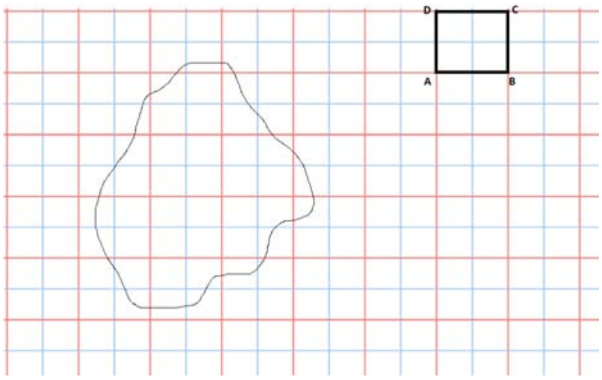
3) Mějme dán čtverec MNOP, narýsujte jeho obraz ve stejnolehlosti *H(K*, -3/2).



4) Narýsujte šestiboký hranol v nadhledu zprava. Délka hrany podstavy bude delší než 5 cm a výška větší než 6 cm.

5) Zvolte konvexní čtyřúhelník KLMN. Průsečík jeho úhlopříček označte S. Útvar U je dán takto: $U = \{X \in E_2 : SX \cap MN \neq \{\}\}$.
Zakreslete tento útvar, popište jeho hranice v prostoru E_2 a E_3 (konvexnost, uzavřenost, souvislost, omezenost aj.).

6) Mějme dán čtverec ABCD, jehož obsah je roven jedné. Zjistěte obsah obrazce zakresleného ve čtvercové síti. Proveďte alespoň jedno zpřesnění. Zadání je na následující straně.



7) Vyberte písmena, která jsou:
   a. středově souměrná,
   b. si navzájem topologickými obrazy,
   c. osově souměrná.

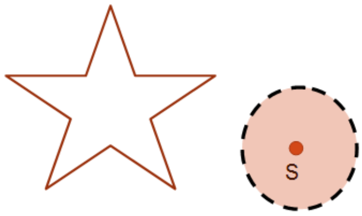
M, N, O, D, R, T, W, X, K, L, I, U, P

7.2 Řešení vzorového zápočtového testu.

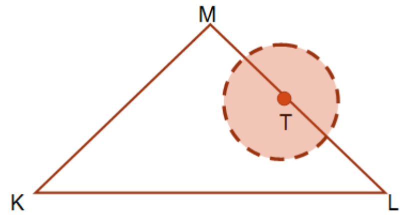
1. Nadefinujte a vhodně zakreslete vnější bod útvaru, vnitřní bod útvaru a hraniční bod útvaru.

Vnitřní bod
Bod R je vnitřním bodem útvaru U právě tehdy, když existuje alespoň jedno okolí bodu R, které je podmnožinou útvaru U.

Vnější bod
Bod S je vnějším bodem útvaru U právě tehdy, když existuje alespoň jedno okolí bodu S, které je neobsahuje žádný bod útvaru U.

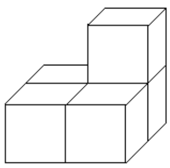


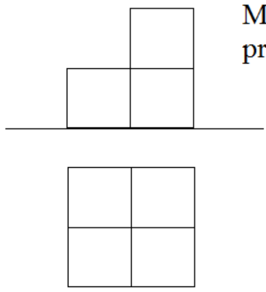
Hraniční bod
Bod T je hraničním bodem útvar U právě tehdy, když pro každé okolí bodu T platí, že obsahuje alespoň jeden bod, který útvaru U náleží, a alespoň jeden bod, který útvaru U nenáleží.



2. Mějme dáno krychlové těleso zadané pomocí kótování (nárys). Zobrazte (narýsujte) jej ve volném rovnoběžném promítání a v Mongeově promítání.

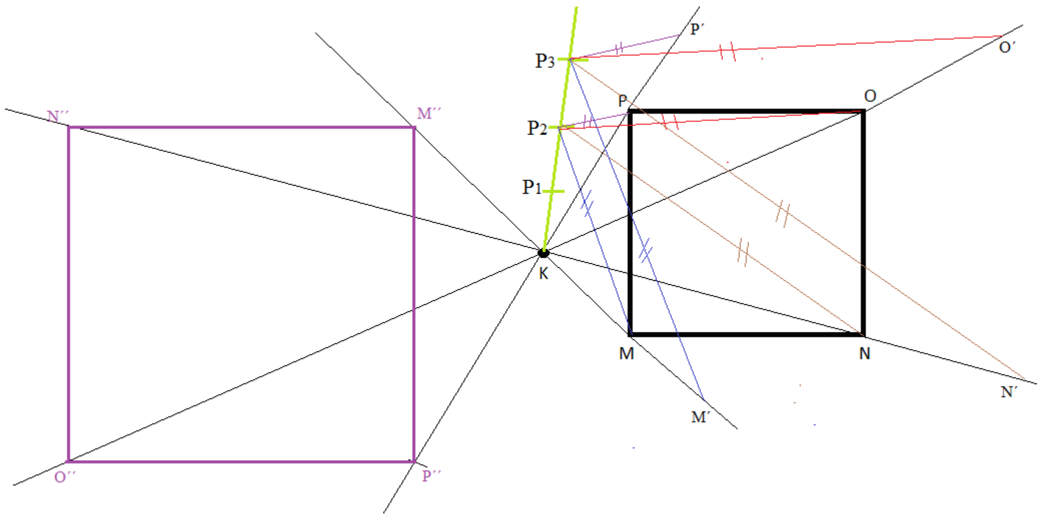
Volné rovnoběžné promítání



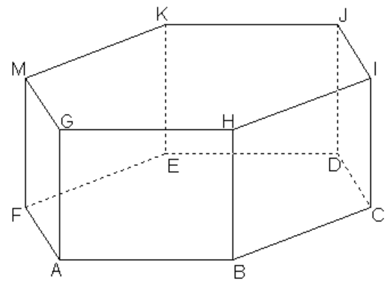


Mongeovo promítání

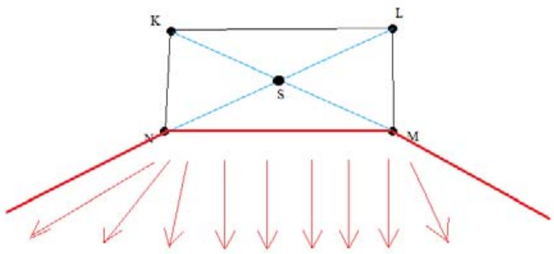
3. Mějme dán čtverec MNOP, narýsujte jeho obraz ve stejnolehlosti *H(K*, -3/2)



4. Narýsujte šestiboký hranol v nadhledu zprava. Délka hrany podstavy bude delší než 5 cm a výška větší než 6 cm.



5. Zvolte konvexní čtyřúhelník KLMN. Průsečík jeho úhlopříček označte S. Útvar U je dán takto: $U = \{X \in E_2: SX \cap MN \neq \{\}\}$.
Zakreslete tento útvar, popište jeho hranice v prostoru E_2 a E_3 (konvexnost, uzavřenost, souvislost, omezenost aj.).



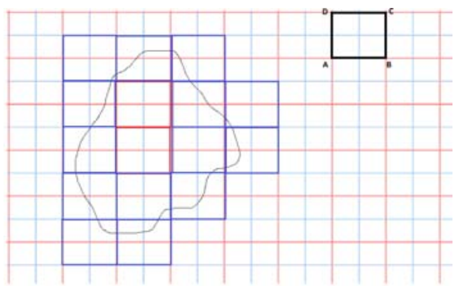
Hranice v E_2:
$\leftarrow NS \cup NM \cup \leftarrow MS$

Hranice v E_3: Útvar samotný

Vlastnosti útvaru:
Souvislý, konvexní, uzavřený, neomezený

6. Mějme dán čtverec ABCD, jehož obsah je roven jedné. Zjistěte obsah obrazce zakresleného ve čtvercové síti. Proveďte alespoň jedno zpřesnění. Zadání je na následující straně.

Před zjemněním



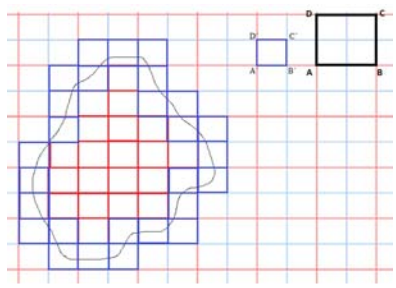
$S_{jádra} \leq S_{útvaru} \leq S_{obalu}$

$2 \leq S_{útvaru} \leq 16$

$S_{útvaru} = 9 \pm 7$

$R_n = \frac{7}{9} = 0{,}777 \qquad (77{,}7\%)$

po zjemnění



$S_{jádra} \leq S_{útvaru} \leq S_{obalu}$

$\frac{18}{4} \leq S_{útvaru} \leq \frac{47}{4}$

$S_{útvaru} = 8{,}125 \pm 3{,}625$

$R_n = \frac{3{,}625}{8{,}125} = 0{,}446 \quad (44{,}6\%)$

7. Vyberte písmena, která jsou:

a. středově souměrná,

N, O, X, I

b. si navzájem topologickými obrazy,

(M, N, W, L, I, U) (O, D) (X, K)

c.osově souměrná.

N, O, X, I

7.2 Otázky k procvičení

Vyzkoušejte si, zda jste schopni o každé z následujících otázek hovořit alespoň 15 minut. Pokud ano, jste připraveni na zkoušku.

1. Axiomy incidence. Řekněte některé z těchto axiomů (alespoň tři) a popište, k čemu axiomy incidence slouží.
2. Axiomy shodnosti, rovnoběžnosti a uspořádání. Řekněte některé z těchto axiomů (alespoň tři) a popište, k čemu axiomy incidence slouží.
3. Shodnost. Jaké známe typy shodností. Jak byste tyto shodnosti předali žákům základní školy?
4. Axiomy uspořádání. Řekněte některé z těchto axiomů (alespoň tři) a popište, k čemu axiomy incidence slouží.
5. Osová souměrnost. Popište, co vše o ní víte. Čím je určena, jakou množinu tvoří samodružné body.
6. Jaké shodnosti lze získat skládáním osových souměrností?
7. Skládání osových souměrností. Jaké souměrnosti a jak lze získat pomocí skládání os souměrnosti.
8. Promítání. Co je promítání? Napište, co vše o něm víte.
9. Geometrické útvary jako množiny bodů.
10. Shodné zobrazení a různé typy shodností v rovině
11. Klasifikace vzájemné polohy dvou geometrických útvarů podle jejich průniku.
12. Podobná zobrazení. Definice. Věty o podobnosti trojúhelníka.
13. Konvexnost geometrických útvarů.
14. Podobné zobrazení v rovině (zejména speciální typ podobnosti v rovině - stejnolehlost).
15. Shodnost úseček, pojmy zaváděné na základě shodnosti úseček.
16. Topologické zobrazení, jednoduchá křivka jako topologický obraz úsečky, jednoduchá uzavřená křivka jako topologický obraz kružnice.
17. Shodnost úhlů a pojmy zaváděné na základě shodnosti úhlů.
18. Topologické pojmy (omezený útvar, vnitřní, vnější a hraniční bod útvaru, otevřený útvar, uzavřený útvar, nepřekrývající se útvary, souvislý útvar).
19. Relace v geometrii. Co je relace, jaké známé relace, jaké vlastnosti u relací určujeme? Vždy uvádějte ukázky z geometrie. Jaké znáte speciální typy relací (uveďte příklad ekvivalence a uspořádání)?

20. Měření geometrických útvarů - Jordanova míra.
21. Shodné zobrazení a shodnost geometrických útvarů. Měření úseček: míra úsečky, délka úsečky.
22. Operace v geometrii. Co je operace? Jaké známe operace v geometrii? Uveďte na úlohách z geometrie.
23. Konstrukce rovnoběžných průmětů prostorových útvarů a rekonstrukce prostorových útvarů z jejich rovnoběžných průmětů.
24. Řezy těles rovinou. Popište základní tři pravidla, která se při řezech používají, a demonstrujte je na konkrétních úlohách.
25. Mongeovo promítání. Zdůvodněte, proč není dostatečně názorné. Jak tuto problematiku zprostředkujete žákům základní školy.
26. Didaktický konstruktivismus. Popište mechanismus poznávacího procesu a demonstrujte jej na konkrétní úloze.
27. Popište, jaké získáte shodnosti pomocí skládání os souměrnosti a demonstrujte na úloze.

8. Řešení úloh

3.1.1

1. Relace dána výčtem prvků {[1;1], [1;2], [1;3], [1;4], [1;5], [1;6], [1;7], [2;4], [2;6], [3;6]}

Definiční obor {1;2 ;3}

Obor hodnot {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}

Inverzní relace $R = \{(x, y) | x, y \in X, y | \; x\}$

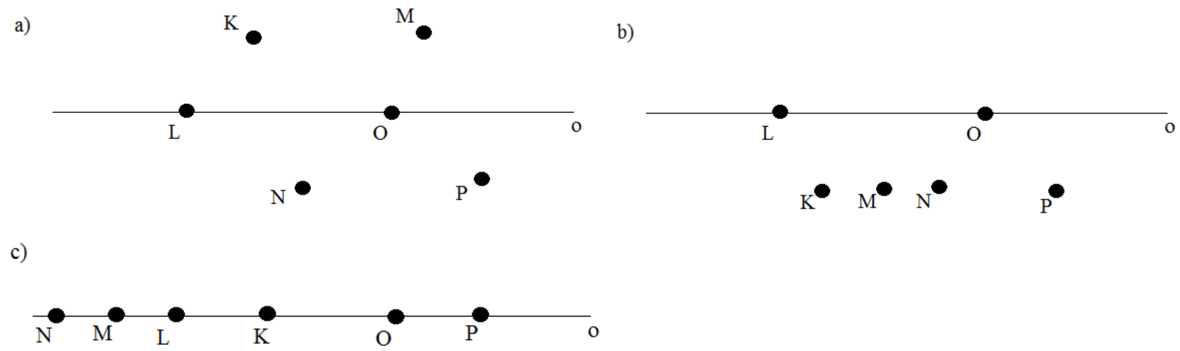
3.2.7

1. Budeme – li za obrazec považovat vždy jednu stavbu, pak žádná není osově ani středově souměrná. Budeme – li za obrazec považovat dvojici staveb, pak:

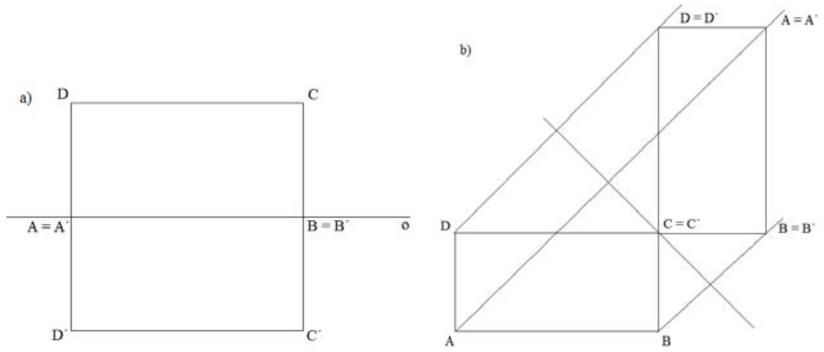
  a) Osově souměrné jsou c - e, b - e, f - e

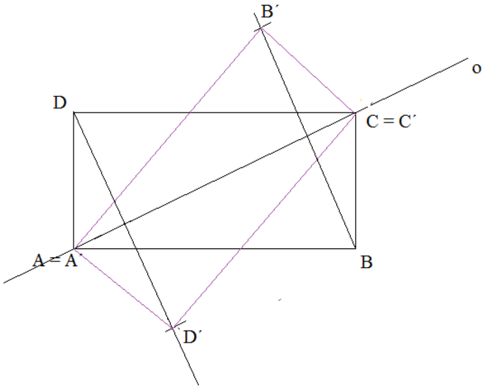
  b) Středově souměrné jsou a – h, b – c, b – f, c - f

2.

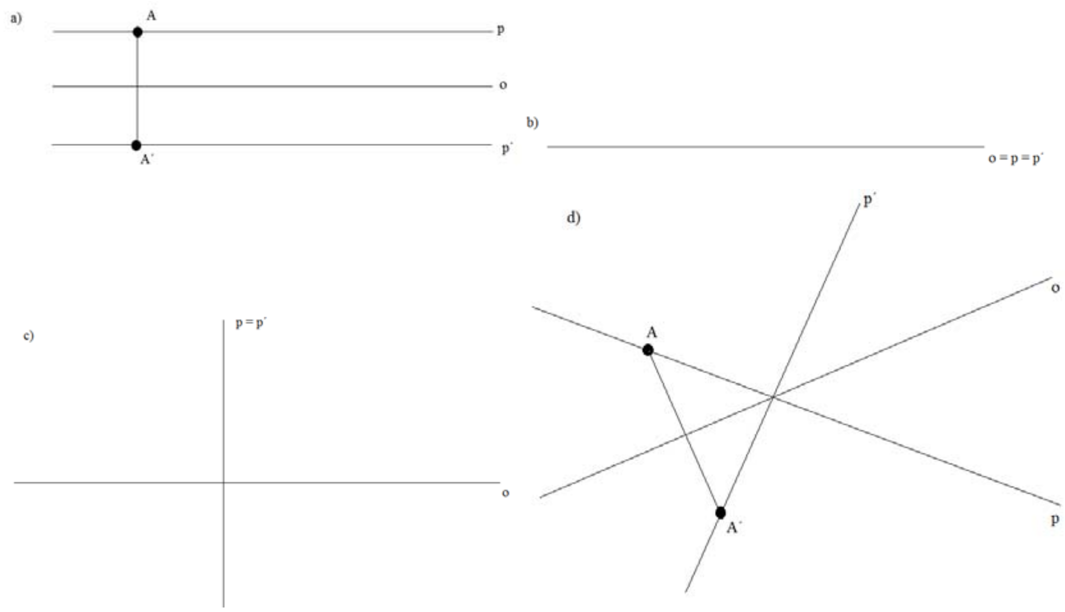


3.

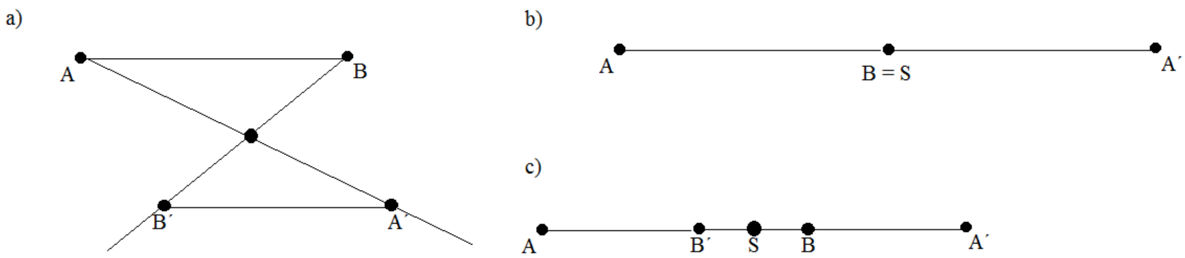




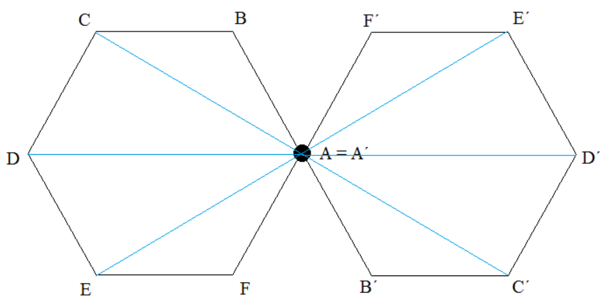
4.



5.

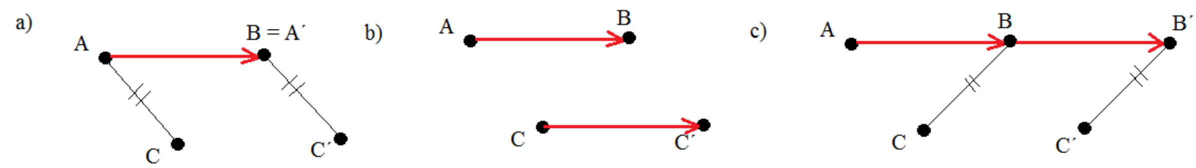


6.

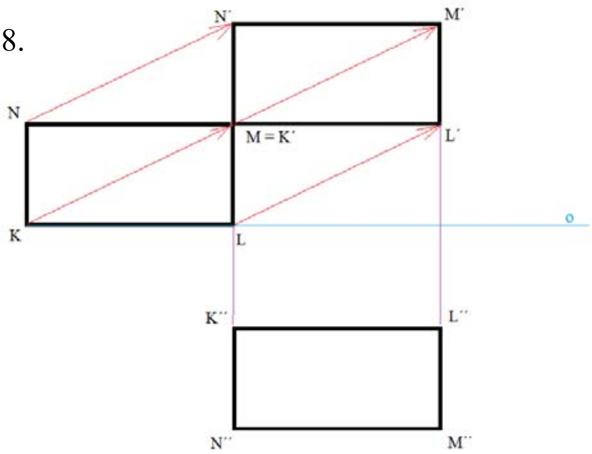


Řešení pomocí skládání os souměrnosti necháváme na čtenáři.

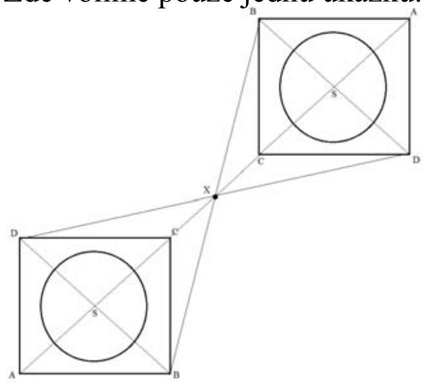
7.



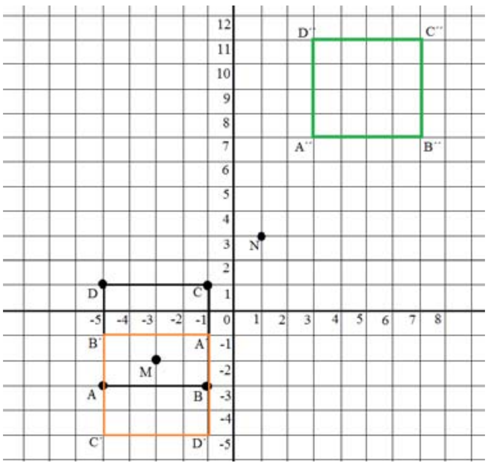
8.



9f. Zde volíme pouze jednu ukázku.



10.



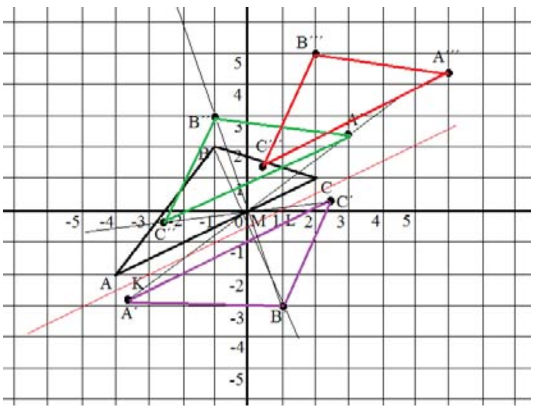
A´[-1;-1] B´[-5; -1] C´[-5; -5]

D´[-1; -5]

A´´[3; 7] B´´[7; 7] C´´[7; 11]

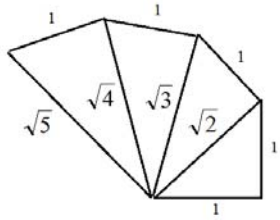
D´´[3; 11]

12.

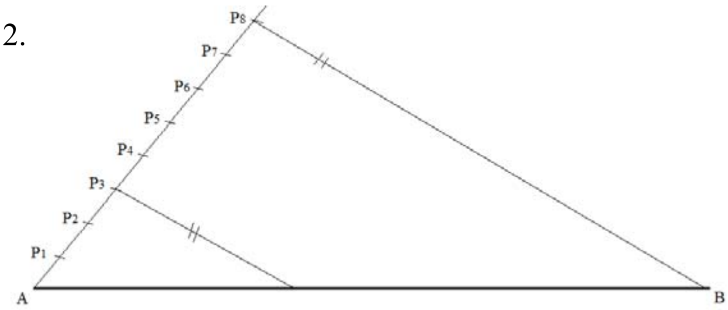


3.3.2

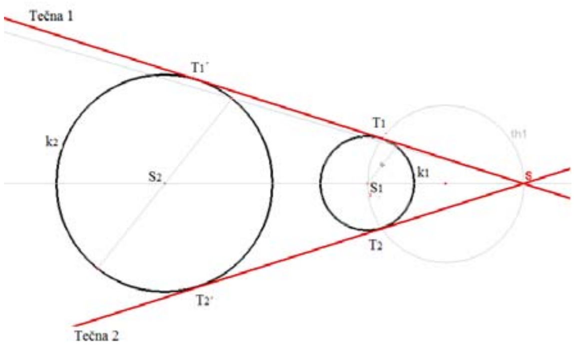
1.



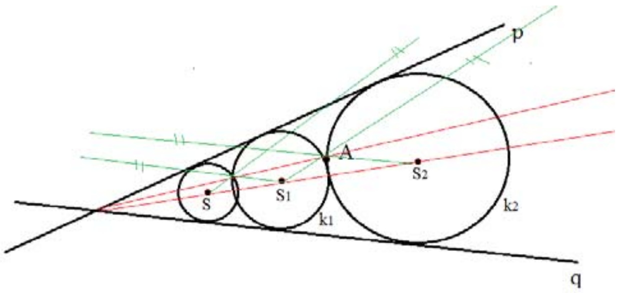
2.



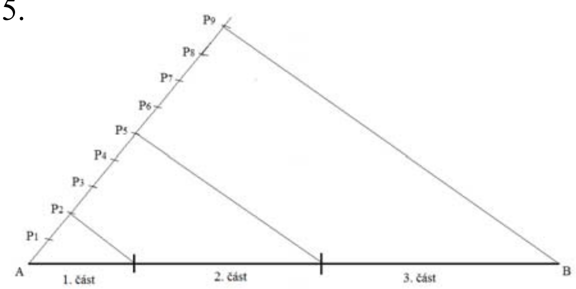
3.



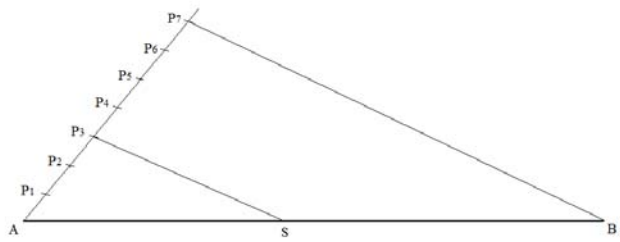
4.



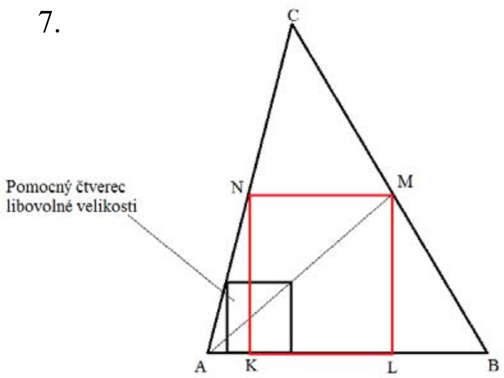
5.



6. $|AS| = \dfrac{3}{7}|AB|$



7.



8.

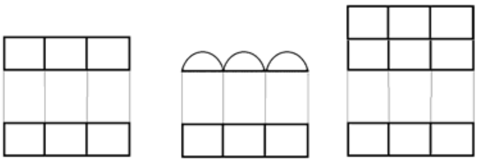
$ABC \cong GHI \quad k = 2$

$GHI \cong RST \quad K = 2{,}5$

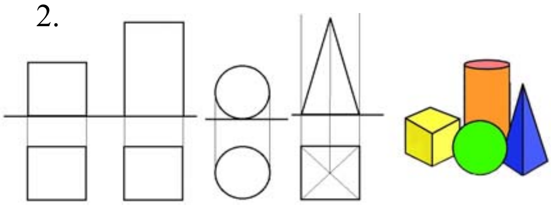
$ABC \cong RST \quad k = 5$

4.2.1

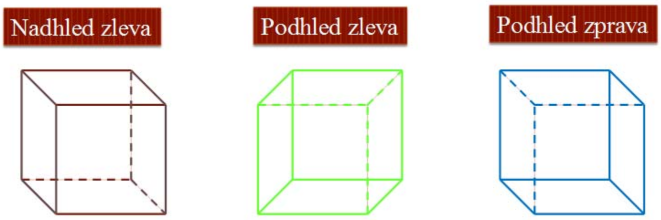
1.



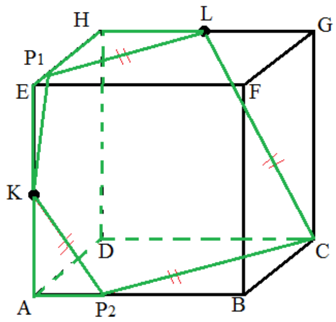
2.



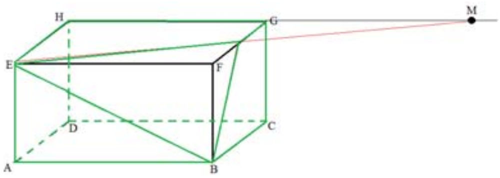
3.



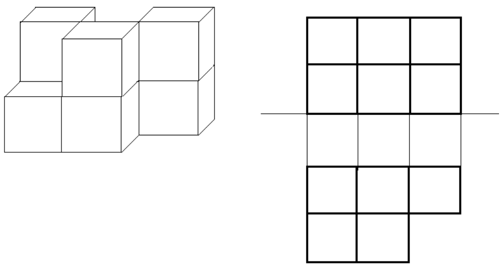
5.



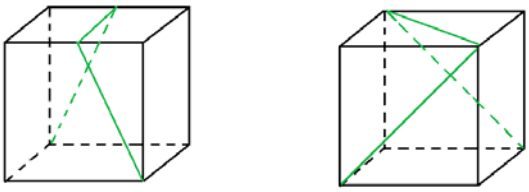
6.



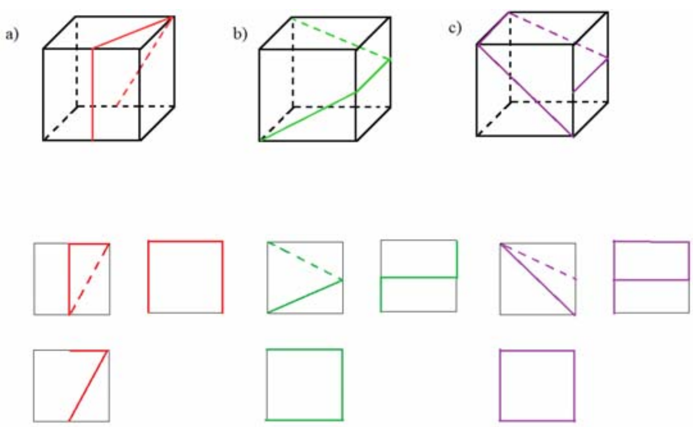
7.



8.

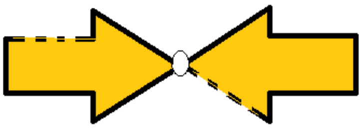


9.



5.2.1

1.



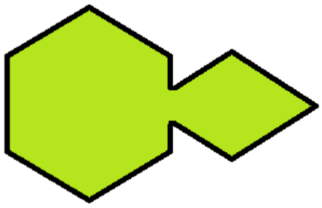
Nekonvexní

Nespojitý

Omezený

Neotevřený

Neuzavřený



Nekonvexní

Spojitý

Omezený

Uzavřený

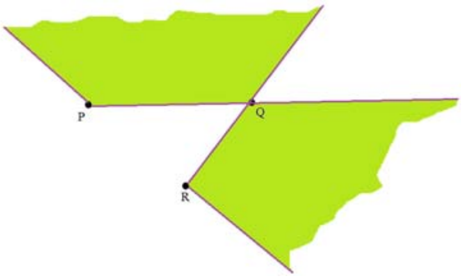
Konvexní

Spojitý

Neomezený

Uzavřený

2.



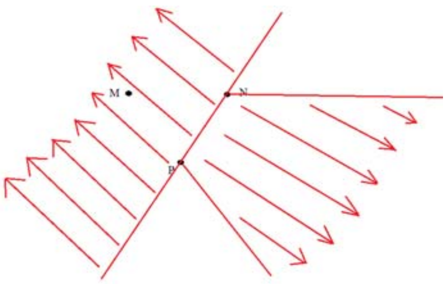
Hranice v E_3 – útvar samotný

Hranice v E_2 : $\leftarrow PR \cup \rightarrow PQ \cup \rightarrow RQ \cup \leftarrow RP$

Vlastnosti útvaru:

Neomezený, nekonvexní, souvislý, uzavřený

3.



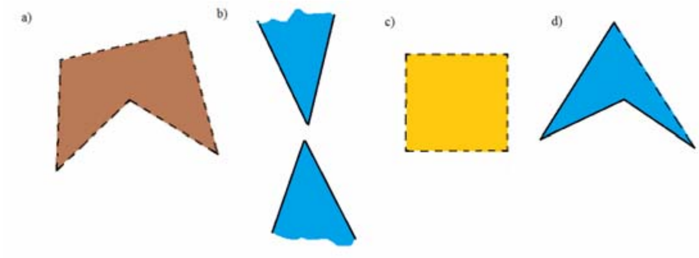
Hranice v E_3 – útvar samotný

Hranice v E_2 : $\leftarrow PN \cup \leftarrow NP \cup \leftarrow PM \cup \leftarrow NM$

Vlastnosti útvaru:

Neomezený, Nekonvexní, souvislý, uzavřený

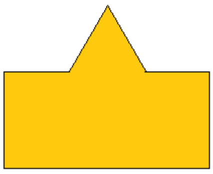
4.

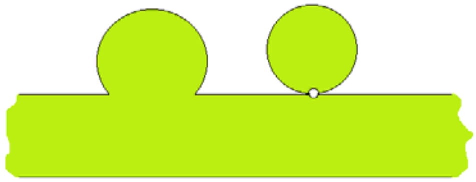


5. V tomto případě volíme pouze ukázku dvou možností.

a) Otevřený, omezený, souvislý, nekonvexní

b) Uzavřený, neomezený, nesouvislý, nekonvexní





6. V tomto případě volíme pouze ukázku dvou možností.

a) Otevřený, omezený, souvislý, nekonvexní

b) Uzavřený, neomezený, nesouvislý, nekonvexní

Toto není možné, průnikem dvou konvexních útvarů opět vznikne konvexní útvar.

6.4

7.

$V_1 = a.b.c = 3.4.5 = 60$

$S_1 = 2ab + 2bc + 2ac$

$V_2 = 2a.2b.2c = 8.a.b.c$

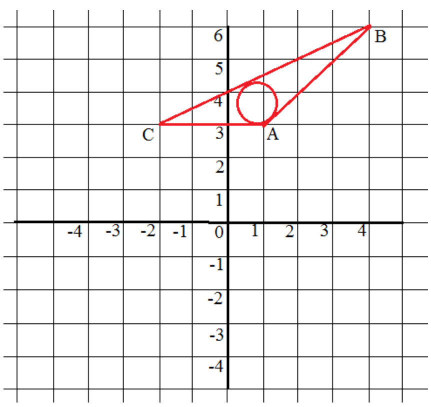
$V_2 = (2.3).(2.4).(2.5) = 6.8.10 = 480$

$S_2 = 2.2a.2b + 2.2b.2c + 2.2a.2c = 8ab + 8bc + 8ac$

$S_2 = 2.(2.3)(2.5) + 2.(2.4)(2.5) + 2.(2.3)(2.5) = 2.6.10 + 2.8.10 + 2.6.10 = 120 + 160 + 120 = 400$

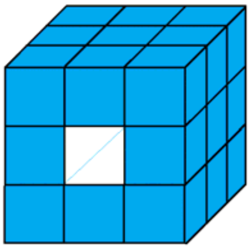
Z výpočtu je patrné, že objem se zvětší 8-krát a povrch 4-krát.

8.

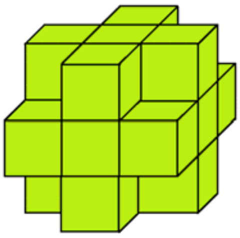


9. Mějme dánu krychli složenou z devíti krychliček. Jak se změní její povrch a objem, jestliže:

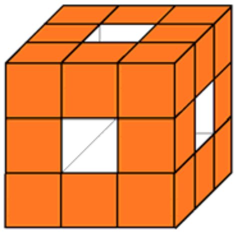
a) Odebereme prostřední tři krychličky (vznikne tunel).



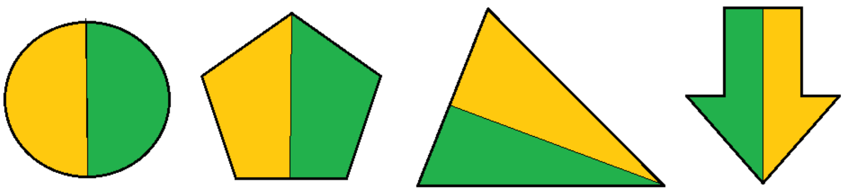
b) Odebereme krychličky u vrcholů.



c) Odebereme vždy pouze tu krychličku, která je ve středu každé stěny.



10.



9. Použitá literatura

1. BERTRAND, Yves. *Soudobé teorie vzdělávání Přel. O. Selucký*. 1.vyd. Praha: Portál, 1998, 247 s. ISBN 80-717-8216-5.
2. BĚLÍK, Miroslav, SVOBODA, Josef. *Matematika pro studium učitelství 1. stupně základní školy: stereometrie*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1996, 115 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-704-4133-X.
3. BĚLÍK, Miroslav. *Geometrie s didaktikou - učební text pro studium učitelství prvního stupně základní školy*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 2005, 46s.
4. FRANCOVÁ, Marta, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Sbírka úloh z elementární geometrie: stereometrie*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004, 86 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-210-3570-6.
5. HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. 2. vyd. Brno: Portál, 2009. ISBN 80-7290-189-3.
6. JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2010, 330 s. ISBN 978-80-7290-399-3.
7. MATOUŠEK, Jiří a Jaroslav NEŠETŘIL. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 3., upr. a dopl. vyd. V Praze: Karolinum, 2007, 423 s. ISBN 978-802-4614-113.
8. PERNÝ, Jaroslav. *Kapitoly z elementární geometrie I*. Vyd. 2., upr. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009, 58 s. ISBN 978-80-7372-539-6.
9. PERNÝ, Jaroslav. *Kapitoly z elementární geometrie II*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2005, 57 s. ISBN 80-7372-025-6.
10. PERNÝ, Jaroslav. *Kapitoly z elementární aritmetiky I*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2010, 81 s. ISBN 978-80-7372-698-0.
11. POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6178-7.
12. Stehlíková, N., Cachová, J.: *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe*. In: Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. Praha: JČMF. 2006. ISBN 80-7015-085-8.
13. BOČEK L., KOČANDRLE M., SEKANINA M., ŠEDIVÝ J., 1980. Geometrie II. Praha: SPN.
14. POMYKALOVÁ, E.: *Stereometrie : Matematika pro gymnázia*. Praha : Prometheus, 1995. 224 s. ISBN 80-7196-004-7.

15. MOLNÁR, J.: *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 1. vyd. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2004. 86 s. ISBN 80-244-0927-5.

Použité odkazy

[1] http://www.plzi.wz.cz/geometricka_zobrazeni/posunuta_soumernost.html

[2] http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/ZakladyGeometrie/Planimetrie/GeometrickaZobrazeni/GeometrickaZobrazeni.html

[3] http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/rovinaUlohy.php

[4] http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CDEQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.zsdobrichovice.cz%2Fprogramy%2Fmatika%2Frvp%2Fpodobnost_trojuhelniku.pps&ei=WayIUcbGFue64ASqkoDwBg&usg=AFQjCNHu4omQUbxtCaZZuHS_spriFcK9uQ&sig2=hVr7EXLLteT8PSyNCD_IGQ&bvm=bv.45960087,d.d2k.

[5] http://pravouhle-promitani.hys.cz/t_trojBod.php.

[6] http://www.contera.cz/projekty/-d8-teplice--krupka/cz_50.htm

[7] http://cs.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biova_p%C3%A1ska

[8] http://user.mendelu.cz/marik/wiki/in-mat-web/in-mat-webse2.html

[9] http://laundrycaffebar.files.wordpress.com/2007/08/caligari.jpg

Ústí nad Labem, 2013

Název:	Geometrie s didaktikou II.
Autor:	Mgr. Vlastimil Chytrý
	Ing. Jana Prchalová
Vydavatel:	Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem
Místo a rok vydání:	Ústí nad Labem, 2013
Vydání:	první
Náklad:	250 výtisků
Rozsah:	84 stran
Tisk:	CDSM – Centrum digitálních služeb MINO
ISBN:	978-80-7414-593-3

ISBN: 978-80-7414-593-3

9 788074 145933